Lineaariset mallit, kevät 2014
Ratkaisut 6
Juho Leppänen

1. Olkoon voimassa malli

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2(x_{i1} - \bar{x}_1) + \beta_3(x_{i2} - \bar{x}_2) + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Satunnaismuuttujat ϵ_i ovat riippumattomia, $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, ja $\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{ij}$. Lisäksi

$$\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i2} - \bar{x}_2) = 0.$$

(a) Johda kerroinparametrien β_j, $j = 1, 2, 3$ suurimman uskottavuuden estimaattoreille lausekkeet, joissa ei esiinny matriisi- eikä vektorilaskennan operaatioita.

(b) Kirjoita lauseke varianssiparametrin harhattomalle estimaattorille.

(c) Kirjoita lauseke hypoteesin

$$H : \beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3$$

F-testisuureelle. Mihin jakaumaan testisuuretta verrataan?

Ratkaisu. (a) Esitetään tarkasteltava malli ensin matriisimuodossa. Olkoon $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$. Tällöin

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_2(x_{11} - \bar{x}_1) + \beta_3(x_{12} - \bar{x}_2) + \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \beta_1 + \beta_2(x_{n1} - \bar{x}_1) + \beta_3(x_{n2} - \bar{x}_2) + \varepsilon_n \end{bmatrix} = \beta_1 \mathbf{1}_n + \beta_2 \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_{n1} - \bar{x}_1 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} x_{12} - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_{n2} - \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & x_{11} - \bar{x}_1 & x_{12} - \bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{11} - \bar{x}_1 & x_{12} - \bar{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}. = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & (\boldsymbol{x}_1 - \bar{x}_1)\mathbf{1}_n & (\boldsymbol{x}_2 - \bar{x}_2)\mathbf{1}_n \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

missä $\boldsymbol{x}_j = \begin{bmatrix} x_{1j} & \cdots & x_{nj} \end{bmatrix}'$. Oletuksen nojalla $(\boldsymbol{x}_1 - \bar{x}_1\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol{x}_2 - \bar{x}_2\mathbf{1}_n) = \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i2} - \bar{x}_2) = 0$. Lisäksi $0 = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j) = \mathbf{1}_n'(\boldsymbol{x}_j - \bar{x}_j\mathbf{1}_n)$, kun $j = 1, 2$. Parametrin $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}'$ SU-estimaattori $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ saadaan nyt normaaliyhtälöiden ratkaisukaavaa käyttäen:

$$\begin{bmatrix}\hat\beta_1\\ \hat\beta_2\\ \hat\beta_3\end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol\beta} = (\boldsymbol X'\boldsymbol X)^{-1}\boldsymbol X'\boldsymbol Y = \left(\begin{bmatrix}\mathbf{1}_n'\\ (\boldsymbol x_1-\bar x_1\mathbf{1}_n)'\\ (\boldsymbol x_2-\bar x_2\mathbf{1}_n)'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_n & \boldsymbol x_1-\bar x_1\mathbf{1}_n & \boldsymbol x_2-\bar x_2\mathbf{1}_n\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_n'\\ (\boldsymbol x_1-\bar x_1\mathbf{1}_n)'\\ (\boldsymbol x_2-\bar x_2\mathbf{1}_n)'\end{bmatrix}\boldsymbol Y$$

$$= \begin{bmatrix} n & 0 & 0\\ 0 & (\boldsymbol x_1-\bar x_1\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol x_1-\bar x_1\mathbf{1}_n) & 0\\ 0 & 0 & (\boldsymbol x_2-\bar x_2\mathbf{1}_n)'(\boldsymbol x_2-\bar x_2\mathbf{1}_n)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_n'\boldsymbol Y\\ (\boldsymbol x_1-\bar x_1\mathbf{1}_n)'\boldsymbol Y\\ (\boldsymbol x_2-\bar x_2\mathbf{1}_n)'\boldsymbol Y\end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{diag}\begin{bmatrix}\frac{1}{n} & \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_{i1}-\bar x_1)^2} & \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_{i2}-\bar x_2)^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} n\overline{Y}\\ \sum_{i=1}^n (x_{i1}-\bar x_1)Y_i\\ \sum_{i=1}^n (x_{i2}-\bar x_2)Y_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{Y}\\ \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i1}-\bar x_1)Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i1}-\bar x_1)^2}\\ \frac{\sum_{i=1}^n (x_{i2}-\bar x_2)Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_{i2}-\bar x_2)^2}\end{bmatrix}.$$

(b) Varianssiparametrin σ^2 harhaton estimaattori on

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-3}(\boldsymbol Y - \boldsymbol X\hat{\boldsymbol\beta})'(\boldsymbol Y - \boldsymbol X\hat{\boldsymbol\beta})\\ &= \frac{1}{n-3}(\boldsymbol Y - \begin{bmatrix}\mathbf{1}_n & \boldsymbol x_1-\bar x_1\mathbf{1}_n & \boldsymbol x_2-\bar x_2\mathbf{1}_n\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol\beta})'(\boldsymbol Y - \begin{bmatrix}\mathbf{1}_n & \boldsymbol x_1-\bar x_1\mathbf{1}_n & \boldsymbol x_2-\bar x_2\mathbf{1}_n\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol\beta})\\ &= \frac{1}{n-3}\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat\beta_1 - (x_{i1}-\bar x_1)\hat\beta_2 - (x_{i2}-\bar x_2)\hat\beta_3)^2. \end{aligned}$$

(c) Muotoa $H:\ \boldsymbol A\boldsymbol\beta = \boldsymbol c$ olevalle hypoteesille F-testisuureen yleinen lauseke on

$$F = \frac{(\boldsymbol A\hat{\boldsymbol\beta}-\boldsymbol c)'(\boldsymbol A(\boldsymbol X'\boldsymbol X)^{-1}\boldsymbol A')^{-1}(\boldsymbol A\hat{\boldsymbol\beta}-\boldsymbol c)}{qS^2} \overset{H}{\sim} F_{q,n-3},$$

missä $q = r(\boldsymbol A)$. Tarkasteltava hypoteesi saadaan esitettyä tässä muodossa valitsemalla

$$\boldsymbol A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},$$

ja $\boldsymbol c = \mathbf{0}$, jolloin $r(\boldsymbol A) = 2$. Merkitään $t_j = \sum_{i=1}^n (x_{ij}-\bar x_j)^2$, kun $j = 1, 2$. Tällöin

$$\begin{aligned} \boldsymbol A(\boldsymbol X'\boldsymbol X)^{-1}\boldsymbol A' &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\operatorname{diag}\begin{bmatrix}\frac{1}{n} & \frac{1}{t_1} & \frac{1}{t_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{n} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{t_1} & -\frac{1}{t_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{n} & 0\\ 0 & \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ja edelleen

$$(\boldsymbol A(\boldsymbol X'\boldsymbol X)^{-1}\boldsymbol A')^{-1} = \begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & \frac{t_1t_2}{t_1+t_2}\end{bmatrix}.$$

Täten F-testisuureen osoittaja on muotoa

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\hat{\beta}-\boldsymbol{c})'(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}')^{-1}(\boldsymbol{A}\hat{\beta}-\boldsymbol{c}) &= \left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)'\begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & \frac{t_1t_2}{t_1+t_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}\\
&= \begin{bmatrix}\hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2-\hat{\beta}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & \frac{t_1t_2}{t_1+t_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2-\hat{\beta}_3\end{bmatrix}\\
&= n\hat{\beta}_1^2+\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}(\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_3)^2,
\end{aligned}
$$

mistä johtuen

$$
F=\frac{n\hat{\beta}_1^2+\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}(\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_3)^2}{2S^2}.
$$

Testisuureen lausekkeessa S^2 on kuten (b)-kohdassa. Testisuuretta verrataan $F_{2,n-3}$-jakaumaan, jota F noudattaa hypoteesin H vallitessa.

2. Oletetaan, että yleistetyn lineaarisen mallin malliyhtälössä $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\epsilon}$ matriisin $\boldsymbol{X}$ sarakkeet ovat ortogonaalisia eli kohtisuorassa toisiaan vastaa. Estimoi parametrivektori $\boldsymbol{\beta}$ soveltamalla lineaarisen mallin estimointiteoriaa ja selvitä estimaattorisi todennäköisyysjakauma. Muodosta lisäksi $100(1-\alpha)$%:n luottamusväli parametrille β_j (=$\boldsymbol{\beta}$:n j.s komponentti).

Ratkaisu. Kun kirjoitetaan $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_p\end{bmatrix}$, pätee selittäjien ortogonaalisuuden nojalla $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}=\operatorname{diag}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_p'\boldsymbol{x}_p\end{bmatrix}$. Näin ollen

$$
\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}=\operatorname{diag}\begin{bmatrix}\frac{1}{\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1} & \cdots & \frac{1}{\boldsymbol{x}_p'\boldsymbol{x}_p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{y}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_p'\boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1}\\ \vdots\\ \frac{\boldsymbol{x}_p'\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}_p'\boldsymbol{x}_p}\end{bmatrix}.
$$

Koska vastaava estimaattori $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ on multinormaalijakautuneen satunnaisvektorin $\boldsymbol{Y}$ täyttä riviastetta oleva lineaarinen muuunnos, on $\hat{\boldsymbol{\beta}}$:lla (p-ulotteinen) multinormaalijakauma. Lasketaan jakauman parametrit:

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'E(\boldsymbol{Y})=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\,;\\
Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'Cov(\boldsymbol{Y})((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\sigma^2\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}=\sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\\
&= \sigma^2\operatorname{diag}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_p'\boldsymbol{x}_p\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Lineaarikombinaation $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\beta}$ tason $1-\alpha$ luottamusväli on

$$
\boldsymbol{a}'\hat{\boldsymbol{\beta}}\pm t_{n-p}(\alpha/2)s\sqrt{\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{a}},
$$

missä $s^2=(n-p)^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$. Koska yksittäinen komponentti β_j saadaan esitettyä muodossa $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\beta}$ valitsemalla $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}0 & \cdots 0 & 1 & 0\cdots 0\end{bmatrix}$ (luku 1 paikassa j), niin voidaan soveltaa ylläolevaa luottamusvälin kaavaa. Nyt

$$\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{x}_j} \qquad \hat{\beta}_j = \frac{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{x}_j}$$

joten luottamusväli saa muodon

$$\frac{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{x}_j} \pm t_{n-p}(\alpha/2)\frac{s}{\sqrt{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{x}_j}}.$$

3. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_7$ riippumattomia normaalisti jakautuneita satunnaismuuttujia, joille pätee $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ ja

$$\mu_i = \begin{cases} \beta_1, & \text{kun } i = 1,2 \\ 2\beta_1, & \text{kun } i = 3,4 \\ \beta_2, & \text{kun } i = 5,6,7. \end{cases}$$

Muotoile tilanne lineaarisena mallina käyttäen matriiseja ja johda parametrien β_1, β_2 ja σ^2 suurimman uskottavuuden estimaatit.

Ratkaisu. Olkoon $\boldsymbol{\epsilon} \backsim N_7(0, \sigma^2\boldsymbol{I}_7)$. Tällöin $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_7 \backsim N(0, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$ ja

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1\boldsymbol{1}_2 \\ 2\beta_1\boldsymbol{1}_2 \\ \beta_2\boldsymbol{1}_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\epsilon} = \beta_1 \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_2 \\ 2\boldsymbol{1}_2 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1}_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_2 & \boldsymbol{0} \\ 2\boldsymbol{1}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

Siis malli voidaan esittää matriisimuodossa $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$, kun valitaan

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_2 & \boldsymbol{0} \\ 2\boldsymbol{1}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}'.$$

Parametrin $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}'$ SU-estimaatti saadaan normaaliyhtälöiden ratkaisukaavasta:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} &= \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_2 & 2\boldsymbol{1}_2' & \boldsymbol{0}' \\ \boldsymbol{0}' & \boldsymbol{0}' & \boldsymbol{1}_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_2 & \boldsymbol{0} \\ 2\boldsymbol{1}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_2 & 2\boldsymbol{1}_2' & \boldsymbol{0}' \\ \boldsymbol{0}' & \boldsymbol{0}' & \boldsymbol{1}_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + 2(y_3 + y_4) \\ y_5 + y_6 + y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + 2(y_3 + y_4) \\ y_5 + y_6 + y_7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{10}(y_1 + y_2) + \frac{1}{5}(y_3 + y_4) \\ \frac{1}{3}(y_5 + y_6 + y_7) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Varianssiparametrin σ^2 SU-estimaatti on puolestaan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{7}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{7}\left(\sum_{i=1}^{2}(y_i - \hat{\beta}_1)^2 + \sum_{i=3}^{4}(y_i - 2\hat{\beta}_1)^2 + \sum_{i=5}^{7}(y_i - \hat{\beta}_2)^2 \right).$$

4. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_4$ riippumattomia normaalisti jakautuneita satunnaismuuttujia, joille pätee $Y_i \sim N(i\beta, \sigma^2)$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Muotoile tilanne lineaarisena mallina ja johda testi hypoteesille $H : \beta = 1$ vaihtoehtoa $H : \beta \neq 1$ vastaan.

Ratkaisu. Olkoon $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_4)$, jolloin $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4 \sim N(0, \sigma^2)$ $\perp\!\!\!\perp$ ja siis

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta + \varepsilon_1 \\ 2\beta + \varepsilon_2 \\ 3\beta + \varepsilon_3 \\ 4\beta + \varepsilon_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \beta + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Tarkasteltavalla mallilla on siis matriisiesitys $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{\varepsilon}$, missä $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}'$. Parametrin β PNS-estimaatti on

$$\hat{\beta} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{4} i y_i.$$

Käytetään hypoteesin H testaamiseen F-testiä. Tässä mallissa muotoa $H : A\beta = c$ (missä A ja c ovat skalaareita) olevalle hypoteesille F-testisuureen yleinen lauseke on

$$F = \frac{(A\hat{\beta} - c)'(A(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}A')^{-1}(A\hat{\beta} - c)}{S^2} \overset{H}{\sim} F_{1,3},$$

missä

$$S^2 = \frac{1}{4-1}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\beta})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\beta}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{Y} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \hat{\beta})'(\boldsymbol{Y} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \hat{\beta}) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{4} (Y_i - i\hat{\beta})^2.$$

Nyt tarkasteltava hypoteesi $H : \beta = 1$ on tätä muotoa, kun valitaan $A = 1 = c$. Koska tällöin $(A(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}A')^{-1} = ((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1})^{-1} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = 30$, niin F-testisuure on muotoa

$$F = \frac{30(\hat{\beta} - 1)^2}{S^2}.$$

Suuret testisuureen arvot ovat hypoteesin H kannalta kriittisiä, ja testin p-arvo on

$$p = P_H(F(\boldsymbol{Y}) \geq F(\boldsymbol{y})) = P(F_{1,3} \geq F(\boldsymbol{y})),$$

missä $F_{1,3}$ on satunnaismuuttuja, joka noudattaa $F_{1,3}$-jakaumaa.