Lineaariset mallit, kevät 2014
Ratkaisut 3
Juho Leppänen

1. Tarkasteltavassa yhtälössä $\boldsymbol{x}_i$ on $(n \times p)$-matriisin $\boldsymbol{X}$ $(p \times 1)$-dimensioinen i. rivivektori $\boldsymbol{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} & \cdots & x_{ip} \end{bmatrix}'$. Vektori $\boldsymbol{\beta}$ on tavalliseen tapaan dimensiota $(p \times 1)$, joten tulo $\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ on skalaari. Vektori $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$ on $(p \times n)$-matriisin ja $(n \times 1)$-vektorin tulona dimensiota $(p \times 1)$. Edelleen $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ on $(p \times p)$-matriisi, mistä johtuen myös tulo $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$ on dimensiota $p \times 1$. Haivaitaan siis, että yhtälön molemmilla puolilla esiintyy $(p \times 1)$-vektori.

Vektorin $\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})$ komponentit nähdään, kun kirjoitetaan

$$\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{bmatrix} (y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} x_{i1}(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ x_{ip}(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_{i1}(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ip}(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix}.$$

Vektorin $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$ komponentit saadaan selville esim. seuraavasti:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n' \end{bmatrix}' (\boldsymbol{y} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n' \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} (\boldsymbol{y} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1'\beta \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n'\beta \end{bmatrix}) \\ &= \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ & \vdots & \\ x_{1p} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - \boldsymbol{x}_1'\beta \\ \vdots \\ y_n - \boldsymbol{x}_n'\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_{i1}(y_i - \boldsymbol{x}_i'\beta) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ip}(y_i - \boldsymbol{x}_i'\beta) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nämä ovat samat kuin yllä lasketut vektorin $\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})$ komponentit.

2. Tarkasteltava malli voidaan lausua matriisimuodossa

$$\boldsymbol{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{X}} \beta + \boldsymbol{\epsilon},$$

Missä $\boldsymbol{Y}$ ja $\boldsymbol{\epsilon}$ ovat dimensiota $(n \times 1)$, ja $\boldsymbol{\epsilon} \backsim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$. Täten PNS-estimaattorille $\hat{\beta}$ pätee

$$\begin{aligned} \hat{\beta} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} = (\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^n x_i Y_i \\ = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \end{aligned}$$

3. Tarkasteltavalla mallilla on matriisimuoto

$$\boldsymbol{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{1}_n & \boldsymbol{x}\end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

missä $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}'$. Harjoituksen 2 Tehtävässä 4 laskettiin, että

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} n & n\overline{x} \\ n\overline{x} & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}$$

Tunnetusta (2×2)-matriisin kääntökaavasta seuraa, että

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \frac{1}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - n^2\overline{x}^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -n\overline{x} \\ -n\overline{x} & n \end{bmatrix} = \frac{1}{n\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -n\overline{x} \\ -n\overline{x} & n \end{bmatrix}.$$

Täten Lauseen 2.1 kohdan (i) perusteella

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & Var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix} = Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \frac{\sigma^2}{n\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -n\overline{x} \\ -n\overline{x} & n \end{bmatrix}$$

Ylläolevasta nähdään heti, että $Var(\hat{\beta}_2) = \sigma^2/(\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2)$. Termin $Var(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\overline{x})$ määrittämiseksi lasketaan ensin, että

$$\begin{bmatrix}1 & \overline{x}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -n\overline{x} \\ -n\overline{x} & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 \\ \overline{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2 & -n\overline{x} + n\overline{x}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 \\ \overline{x}\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2.$$

Kun $\boldsymbol{Z}$ on mikä hyvänsä satunnaisvektori ja A dimensioltaan sopiva vakiomatriisi, niin $Cov(A\boldsymbol{Z}) = ACov(\boldsymbol{Z})A'$. Sovelletaan tätä tietoa:

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\overline{x}) &= Cov(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\overline{x}) = Cov(\begin{bmatrix}1 & \overline{x}\end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{bmatrix}1 & \overline{x}\end{bmatrix} Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \begin{bmatrix}1 \\ \overline{x}\end{bmatrix} \\ &= \frac{\sigma^2}{n\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \begin{bmatrix}1 & \overline{x}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -n\overline{x} \\ -n\overline{x} & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 \\ \overline{x}\end{bmatrix} = \frac{\sigma^2}{n\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Lauseke $Var(\hat{\beta}_2)$ minimoituu, kun $\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$ maksimoituu. Kun n on parillinen, tuntuu ilmeiseltä että summa $\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$ maksimoituu, kun tasan puolet selittäjistä x_i saavat arvokseen välin vasemman päätepisteen c, ja loput oikean päätepisteen d jolloin otoskeskiarvo $\overline{x}$ on välin keskipiste $(c + d)/2$ ja kaikki selittäjät x_i ovat yhtä kaukana otoskeskiarvosta. Tällainen selittävien muuttujien arvojen valinta ei taatusti ole yleensä järkevä, sillä jos malli muodostetaan käyttäen vain kahta eri selittävän muuttujan arvoa, muodostuu riskiksi että aineiston generoinut todellinen parametri tulee estimoitua väärin.

Ylimääräinen tarkastelu. Perustellaan funktion $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ maksimi joukossa $[c,d]^n$ hieman tarkemmin. Näissä tarkasteluissa tarvitaan joitain (esim.) vektorianalyysin kurssin tietoja. Ei ole vaikeaa osoittaa, että funktion f ainoat kriittiset pisteet (eli gradientin ∇f nollakohdat) ovat muotoa $x\mathbf{1}_n$, missä $x \in \mathbb{R}$. Näissä pisteissä $\boldsymbol{x}$ on $f(\boldsymbol{x}) = 0$, joten kyseessä on minimi. Siten maksimi löytyy joukon $[c,d]^n$ reunalta, tarkoittaen että maksimipisteen jokin koordinaatti on joukossa $\{c,d\}$. Voidaan (tilanteen symmetrisyyden nojalla) olettaa, että esim. ensimmäinen komponentti $x_1 \in \{c,d\}$, jolloin tehtäväksi tulee maksimoida funktio $f(t, x_2, \ldots, x_n)$ joukossa $[c,d]^{n-1}$, missä $t \in \{c,d\}$. Mutta myös tämän funktion ainoat kriittiset pisteet on helppo nähdä minimeiksi, ja edellä oleva päättely voidaan toistaa. Jatkamalla näin nähdään lopulta, että f:n maksimi on joukossa $\{c,d\}^n$. Olkoon $\boldsymbol{x} \in \{c,d\}^n$ ja olkoon $k \in \{1,\ldots,n\}$ niiden $\boldsymbol{x}$:n komponenttien x_i lukumäärä, joille $x_i = c$. Siis

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2 = kc^2 + (n-k)d^2 - \frac{1}{n}(kc + (n-k)d)^2$$

Siis f:n lauseke tällaisissa pisteissä $\boldsymbol{x}$ riippuu vain luvusta k ja täten riittää maksimoida ylläoleva lauseke k:n suhteen. Merkitään ko. lauseketta symbolilla $\phi(k)$. Suoraviivaisten derivointien jälkeen on helppo todeta, että $\phi'(k) = 0 \iff k = n/2$. Tämä todella maksimoi ϕ:n, sillä pätee $\phi''(n/2) < 0$.

4. Otetaan ensin käyttöön seuraavat merkinnät:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Y}_1 = \begin{bmatrix} Y_1 & \cdots & Y_{n_1} \end{bmatrix}' \ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_{n_1} \end{bmatrix}' \ \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}' \ \boldsymbol{\epsilon_1} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \cdots & \epsilon_{n_1} \end{bmatrix}' \\
&\boldsymbol{Y}_2 = \begin{bmatrix} Y_{n_1+1} & \cdots & Y_n \end{bmatrix}' \ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{n_1+1} & \cdots & x_n \end{bmatrix}' \ \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix}' \ \boldsymbol{\epsilon_2} = \begin{bmatrix} \epsilon_{n_1+1} & \cdots & \epsilon_n \end{bmatrix}',
\end{aligned}$$

missä $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \backsim N(0, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$. Näiden merkintöjen avulla saadaan (satunnaismuuttujien Y_i jakaumaoletukset huomioon ottaen) kaksi matriisimuotoista lineaarista mallia:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ \boldsymbol{Y}_1 = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_2 x_1 + \epsilon_1 \\ \vdots \\ \beta_1 + \beta_2 x_{n_1} + \epsilon_{n_1} \end{bmatrix} = \beta_1 \mathbf{1}_{n_1} + \beta_2 \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{\epsilon}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & \boldsymbol{x_1} \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{X}_1} \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_1 \\
&(2)\ \ \boldsymbol{Y}_2 = \begin{bmatrix} Y_{n_1+1} \\ \vdots \\ Y_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_3 + \beta_4 x_{n_1+1} + \epsilon_{n_1+1} \\ \vdots \\ \beta_3 + \beta_4 x_n + \epsilon_n \end{bmatrix} = \beta_3 \mathbf{1}_{n_2} + \beta_4 \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{\epsilon}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_2} & \boldsymbol{x_2} \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{X}_2} \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_2
\end{aligned}$$

Nämä mallit ovat erikoistapauksia harjoituksen 2 tehtävässä 4 tarkastellusta yhden selittäjän regressiomallista. Merkitään mallin (1) *PNS*-estimaattia symbolilla $\hat{\boldsymbol{\beta}}^1 = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1^1 & \hat{\beta}_2^1 \end{bmatrix}$ ja mallin (2) *PNS*-estimaattia symbolilla $\hat{\boldsymbol{\beta}}^2 = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1^2 & \hat{\beta}_2^2 \end{bmatrix}$. Nyt harjoituksen 2 tehtävän 4 nojalla

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^1 = (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} \overline{y}_1 - \hat{\beta}_2^1 \\ \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\overline{x}_1)(y_i-\overline{y}_1)}{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\overline{x}_1)^2} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^2 = (\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} \overline{y}_2 - \hat{\beta}_2^2 \\ \frac{\sum_{i=n_1+1}^{n}(x_i-\overline{x}_2)(y_i-\overline{y}_2)}{\sum_{i=n_1+1}^{n}(x_i-\overline{x}_2)^2} \end{bmatrix},$$

missä on merkitty $\overline{x}_1 = (1/n_1)\sum_{i=1}^{n_1} x_i$, $\overline{x}_2 = (1/n_2)\sum_{i=n_1+1}^{n} x_i$ ja vastaavasti y-muuttujille.

a) Nyt

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_1 \\ \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}}_{=X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

missä $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{bmatrix}'$ ja $\boldsymbol{\epsilon} \backsim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}_n)$.

b) Kohdan a) perusteella

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} &= \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}' \boldsymbol{y} \\
&= \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1' & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1 \\ (\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}^1 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Aluksi mainitun nojalla PNS-estimaatit voidaan siis lausua komponenttimuodossa

$$\begin{cases}
\hat{\beta}_1 &= \overline{y}_1 - \hat{\beta}_2 \\
\hat{\beta}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\overline{x}_1)(y_i-\overline{y}_1)}{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\overline{x}_1)^2} \\
\hat{\beta}_3 &= \overline{y}_2 - \hat{\beta}_4 \\
\hat{\beta}_4 &= \frac{\sum_{i=n_1+1}^{n}(x_i-\overline{x}_2)(y_i-\overline{y}_2)}{\sum_{i=n_1+1}^{n}(x_i-\overline{x}_2)^2}
\end{cases}$$

c) Ehto $\beta_2 = \beta_4$ merkitsee, että työvuosien määrällä olisi keskimäärin sama vaikutus lääkärien kuukausipalkkaan niin naisilla kuin miehillä.

5. a) Tarkasteltava malli on muotoa

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \epsilon_i,$$

missä $i = 1, \dots, 6$. Selittävien muuttujien arvot saadaan luettua annetusta taulukosta; mallin matriisiesityksessä $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ matriisiksi $\boldsymbol{X}$ muodostuu

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Edelleen

$$\boldsymbol{X'X} = \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Määritetään seuraavaksi matriisin $\boldsymbol{X'X}$ käänteismatriisi. Tämän voi tehdä muokkaamalla matriisia $\left[\boldsymbol{X'X} | \boldsymbol{I}_3\right]$ alkeisrivioperaatioilla niin, että lopulta päädytään tilanteeseen $\left[\boldsymbol{I}_3 | \boldsymbol{A}\right]$, jolloin matriisi $\boldsymbol{A}$ on $\boldsymbol{X'X}$:n käänteismatriisi.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(1)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(2)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \overset{(3)}{\rightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \overset{(4)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \overset{(5)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right] \overset{(6)}{\rightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right] \overset{(7)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right] \overset{(8)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$$\overset{(9)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{3}{12} & -\frac{3}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

Alkeisrivioperaatiot:
(1) Rivistä 1 vähennetään rivi 3
(2) Rivistä 3 vähennetään rivi 1
(3) Rivistä 2 vähennetään rivi 1

(4) Rivi 2 kerrotaan skalaarilla 1/2
(5) Rivistä 3 vähennetään rivi 2
(6) Rivi kolme kerrotaan skalaarilla 1/2
(7) Rivistä 2 vähennetään rivi 3
(8) Rivistä 1 vähennetään rivi 3
(9) Rivi 1 kerrotaan skalaarilla 3

Siis

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 9 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{bmatrix},$$

ja voidaan laskea

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -3 & 3 & -6 & 3 \\ -3 & -6 & -3 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Vektorin $\boldsymbol{y}$ komponentit nähdään taulukon hapenkulutus-sarakkeesta, ja voidaan siten a)-kohtaa hyödyntäen laskea

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{y} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -3 & 3 & -6 & 3 \\ -3 & -6 & -3 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 44 \\ 45 \\ 54 \\ 59 \\ 50 \\ 45 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 576 \\ -12 \\ 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Edelleen

$$\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 48 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 47 \\ 48 \\ 51 \\ 52 \\ 51 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 48 \\ 47 \\ 48 \\ 51 \\ 52 \\ 51 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 44 \\ 45 \\ 54 \\ 59 \\ 50 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ -8 \\ 2 \\ 6. \end{bmatrix}$$

Siis voidaan laskea varianssin σ^2 *SU*-estimaatti $\hat{\sigma}^2 = (1/6)(\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{y})'(\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{y}) = 160/6 \approx 26,7$.

c) Kerroin β_2 ilmaisee hapenkulutuksen keskimääräisen eron alle 45-vuotiailla vähintään 45-vuotiaisiin nähden sukupuolen pysyessä vakiona. Kerroin β_3 ilmaisee hapenkulutuksen keskimääräisen eron miehillä naisiin nähden ikäluokan pysyessä vakiona.