Galaksit ja kosmologia FYS2052, 5 op, syksy 2023

E207 Physicum

Luento 6: Kosmologia II, 09/10/2023

Tällä luennolla käsitellään

1. Maailmankaikkeuden koostumus ja ΛCDM mallin parametrit.
2. Friedmannin yhtälöiden ratkaisuja säteilylle, aineelle ja ΛCDM standardimallille.
3. Hiukkashorisontti ja maailmankaikkeuden ikä eri malleissa.
4. Etäisyyksien mittaaminen suurilla etäisyyksillä ja miten havaitut etäisyydet riippuvat kosmologisesta mallista.
5. Vastaa soveltuvin osin: CBMB: sivut 403-412

6.1 Maailmankaikkeuden tiheys I

- Friedmannin toinen yhtälö voidaan lausua maailmankaikkeuden eri komponenttien (säteily, aine, tyhjiöenergia) avulla:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{m,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{r,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_{\Lambda,0}\right] - \frac{Kc^2}{a^2}$$

- Kriittinen tiheys on määritelty:

$$\rho_{\text{crit}}(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \Rightarrow \rho_{m,0} = \Omega_{m,0}\rho_{\text{crit},0}$$

- Kaarevuusparametri voidaan lausua: $\Omega_{K,0} = -\frac{Kc^2}{H_0^2 a_0^2} = 1 - \Omega_0$
- Ala-indeksi nolla kertoo tämän hetkisen arvon. Maailmankaikkeuden kokonaistiheys on: $\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{r,0}$

Maailmankaikkeuden tiheys II

- Maailmankaikkeuden massatiheys voidaan lausua:

$$\rho_{m,0} = \Omega_{m,0}\rho_{\mathrm{crit},0} \approx 1.88 \times 10^{-29}\Omega_{m,0}h^2 \ \mathrm{gcm}^{-3}$$

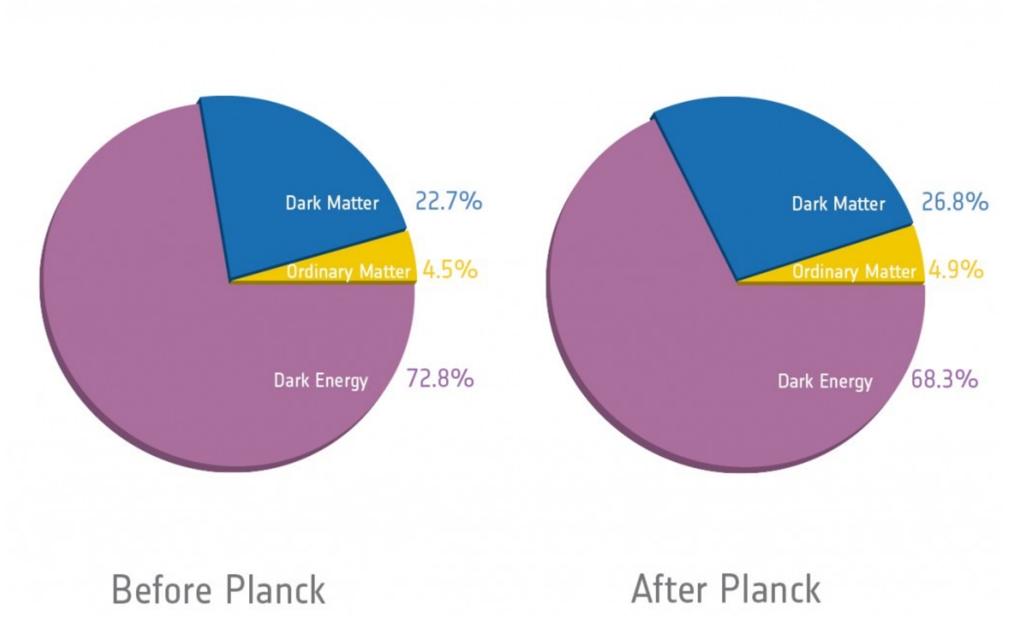
- Planck-satelliitin tulosten mukaan maailmankaikkeuden kokonaisainetiheys on $\Omega_{m,0}$=0.3089, josta $\Omega_{b,0}$=0.048 on baryonista ainetta ja loput $\Omega_{dm,0}$=0.2609 pimeää ainetta, kun h=0.6774.
- Säteilyn energiatiheydestä suurin osa on kosmisessa mikroaalto-taustassa jonka lämpötila on T=2.73 K.

$$\rho_{r,0} \approx 4.7 \times 10^{-34} \ \mathrm{gcm}^{-3} \ \Rightarrow \Omega_{\mathrm{r},0} \approx 2.5 \times 10^{-5}\mathrm{h}^{-2}$$

- Koska CMB-havainnot osoittavat, että maailmankaikkeus on laakea Ω_0=1 on loput maailmankaikkeuden energiatiheydestä pimeää energiaa: $\Omega_\Lambda = 0.6911$

ΛCDM standardimalli

- Kosmologiset parametrit määrätään yhdistämällä useita erilaisia mittauksia.
- Tärkeimpänä ovat CMB-mittaukset, mutta lisäksi käytetään useita astrofysikaalisia tuloksia: supernova Ia etäisyydet, galaksien suuren mittakaavan jakauma, galaksienjoukkojen ominaisuudet, gravitaatiolinssit jne.
- Mittaukset ovat usein degeneroituneita, joka tarkoittaa sitä, että mikäli yhtä parametria muutetaan, muuttuu muutkin parametrit.



- Suurin ero Planckin mittauksissa oli pienempi h=0.6711 (ennen Planckia h=0.71) ja koska mitattavat parametrit ovat Ωh^2 muuttuvat myös mitatut tiheydet muuttuneen h:n myötä.

6.2 Friedmann-yhtälöiden yleisiä ratkaisuja

- Sijoittamalla Friedmann-yhtälöön ja käyttämällä tulosta $(a/a_0)=(1+z)^{-1}$:

$$H(z) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(z) = H_0 E(z) \qquad \Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_{\mathrm{crit}}(t)}$$

$$E(z) = \left[\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + (1-\Omega_0)(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}\right]^{1/2}$$

- Kun tiedämme nykyiset arvot H_0, $\Omega_{\Lambda,0}$, $\Omega_{m,0}$ ja $\Omega_{r,0}$ voimme laskea niiden arvot kaikille muille punasiirtymille yksinkertaista menetelmää käyttäen:

$$\Omega_\Lambda(z) = \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{E^2(z)}; \quad \Omega_m(z) = \frac{\Omega_{m,0}(1+z)^3}{E^2(z)}; \quad \Omega_r(z) = \frac{\Omega_{r,0}(1+z)^4}{E^2(z)}$$

Friedmann-yhtälön ratkaisu säteilylle

- Hyvin varhaisessa maailmankaikkeudessa säteily oli dominoiva energia-komponentti. Tällöin Friedmann-yhtälö yksinkertaistui seuraavaan muotoon joka on helppo integroida:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{r,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a_0} = \left(\frac{32\pi G\rho_{r,0}}{3}\right)^{1/4} t^{1/2}$$

- Käyttämällä $\rho_r \propto a^{-4}$, $T \propto a^{-1}$: Kuuma alkuräjähdys, yhtälö ~voimassa kun $0<t<10^{10}$ s, tai $z>10^5$.

$$\frac{T}{10^{10}\ \mathrm{K}} \sim \frac{k_B T}{1\ \mathrm{MeV}} \sim \left[\frac{\rho}{10^7\ \mathrm{gcm}^{-3}}\right]^{1/4} \sim \frac{1+z}{10^{10}} \sim \left[\frac{t}{1\ \mathrm{s}}\right]^{-1/2}$$

Friedmann-yhtälön ratkaisu aineelle kun K=0, Ω_Λ=0

- Punasiirtymillä $z<10^5$ säteily ei vaikuta juurikaan maailmankaikkeuden dynamiikkaan ja aine on dominoiva komponentti.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_{m,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - \frac{Kc^2}{H_0^2 a_0^2}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right]$$

- Ratkaisu laakealle mallille K=0, Ω_Λ=0 on erityisen yksinkertainen.

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}$$

- Tätä mallia kutsutaan Einstein-de-Sitter (EdS) maailmankaikkeudeksi.

Friedmann-yhtälön ratkaisu aineelle K=+1, Ω_Λ=0 (Suljettu malli)

- Suljetussa mallissa K=+1 F-yhtälön ratkaisu voidaan lausua parametrisessa muodossa:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0}-1)}(1-\cos\vartheta); \qquad H_0 t = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0}-1)^{3/2}}(\vartheta - \sin\vartheta)$$

- Kulma $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Tämä malli saavuttaa maksimikokonsa a_{max} ajanhetkellä t_{max} kun $\vartheta = \pi$, jonka jälkeen se luhistuu kokoon:

$$\frac{a_{\max}}{a_0} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}-1}; \quad H_0 t_{\max} = \frac{\pi}{2}\frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0}-1)^{3/2}}$$

- Varhaisella ajanhetkillä $a \propto t^{2/3}$, koska kaarevuustermi K on tällöin vielä pieni.

Friedmann-yhtälön ratkaisu aineelle K=-1, Ω_Λ=0 (Avoin malli)

- Avoimessa mallissa K=-1 Friedmann-yhtälön ratkaisu voidaan lausua myös parametrisessa muodossa:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m,0}}{(1-\Omega_{m,0})}(\cosh\vartheta - 1); \quad H_0 t = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m,0}}{(1-\Omega_{m,0})^{3/2}}(\sinh\vartheta - \vartheta)$$

- Kulma $0 \leq \vartheta \leq \infty$. Varhaisella ajanhetkillä $a \propto t^{2/3}$, koska jälleen kaarevuustermi K on tällöin vielä pieni.
- Myöhemmillä ajanhetkillä $\vartheta >> 1$ $\sinh\vartheta = \cosh\vartheta$ $a \propto t$
- Maailmankaikkeus laajenee vapaasti ja ikuisesti.

Friedmann-yhtälön ratkaisu laakealle $\Omega_m+\Omega_\Lambda=1$ mallille

- Laakeassa mallissa missä on aineen lisäksi tyhjiöenergiaa:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2[\Omega_{m,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{\Lambda,0}]$$

- Ratkaisuksi kun $0<\Omega_{m,0}<1$ saadaan integroimalla (Lask 3 tehtävä 5):

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3}\left[\sinh\left(\frac{3}{2}\Omega_{\Lambda,0}^{1/2}H_0 t\right)\right]^{2/3}$$

- Varhaisella ajanhetkillä $a \propto t^{2/3}$, koska Λ-termi on tällöin vielä pieni ja malli muistuttaa Einstein-de Sitter mallia. Myöhäisillä ajanhetkillä a kasvaa eksponentiaalisesti ja muistuttaa de Sitter mallia, jolle $\Omega_\Lambda=1$:

$$a \propto e^{\Omega_{\Lambda,0}^{1/2}H_0 t}$$

6.3 Hiukkashorisontti

- Koska maailmankaikkeuden ikä on äärellinen, vain äärellinen alue on ehtinyt olla vuorovaikutuksessa meidän kanssa. Hiukkas-horisontti määritellään:

$$\int_0^{r_H} dr = \chi(r_H) = \int_0^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{a_0} \frac{da}{a} \left[\frac{8\pi G\rho(a)a^2}{3c^2} - K \right]^{-1/2}$$

- Mikäli integraali konvergoituu voi olla alueita $\chi(r)>\chi(r_H)$, mistä emme ole saaneet vielä informaatiota. Näin käy jos $\rho a^2 \Rightarrow \infty$ kun $a \Rightarrow 0$. Hiukkashorisontteja on maailmankaikkeuksissa jossa säteily ($\rho \propto a^{-4}$) tai aine ($\rho \propto a^{-3}$) dominoi hyvin varhaisella epookilla.
- Tällä seikalla on suuri merkitys kun tarkastellaan varhaisen maailmankaikkeuden fysiikkaa (Luento 12).

Maailmankaikkeuden ikä I

- Laajenevassa homogeenisessa mallissa maailmankaikkeuden ikä punasiirtymällä z saadaan yhtälöstä:

$$t(z) = \int_0^{a(z)} \frac{da}{\dot{a}} = \frac{1}{H_0} \int_z^{\infty} \frac{dz}{(1+z)E(z)}$$

- Tämä yhtälö voidaan integroida numeerisesti mielivaltaiselle kosmologialle ja erikoistapauksissa analyyttisesti. Laittamalla alaraja z=0 saadaan maailmankaikkeuden nykyinen ikä.
- EdS mallille $\Omega_{m,0}$=1 ja $\Omega_{\Lambda,0}$=0 :

$$t = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3} (1+z)^{-3/2}$$

Maailmankaikkeuden ikä II

For an open universe with $\Omega_{\Lambda,0} = 0$ and $\Omega_0 = \Omega_{m,0} < 1$,

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \frac{\Omega_0}{2(1-\Omega_0)^{3/2}} \left[\frac{2\sqrt{(1-\Omega_0)(\Omega_0 z + 1)}}{\Omega_0(1+z)} - \cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_0 z - \Omega_0 + 2}{\Omega_0 z + \Omega_0} \right) \right].$$

For a closed universe with $\Omega_{\Lambda,0} = 0$ and $\Omega_0 = \Omega_{m,0} > 1$,

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[-\frac{2\sqrt{(\Omega_0 - 1)(\Omega_0 z + 1)}}{\Omega_0(1+z)} + \cos^{-1}\left(\frac{\Omega_0 z - \Omega_0 + 2}{\Omega_0 z + \Omega_0} \right) \right].$$

Finally, for a flat universe with $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$,

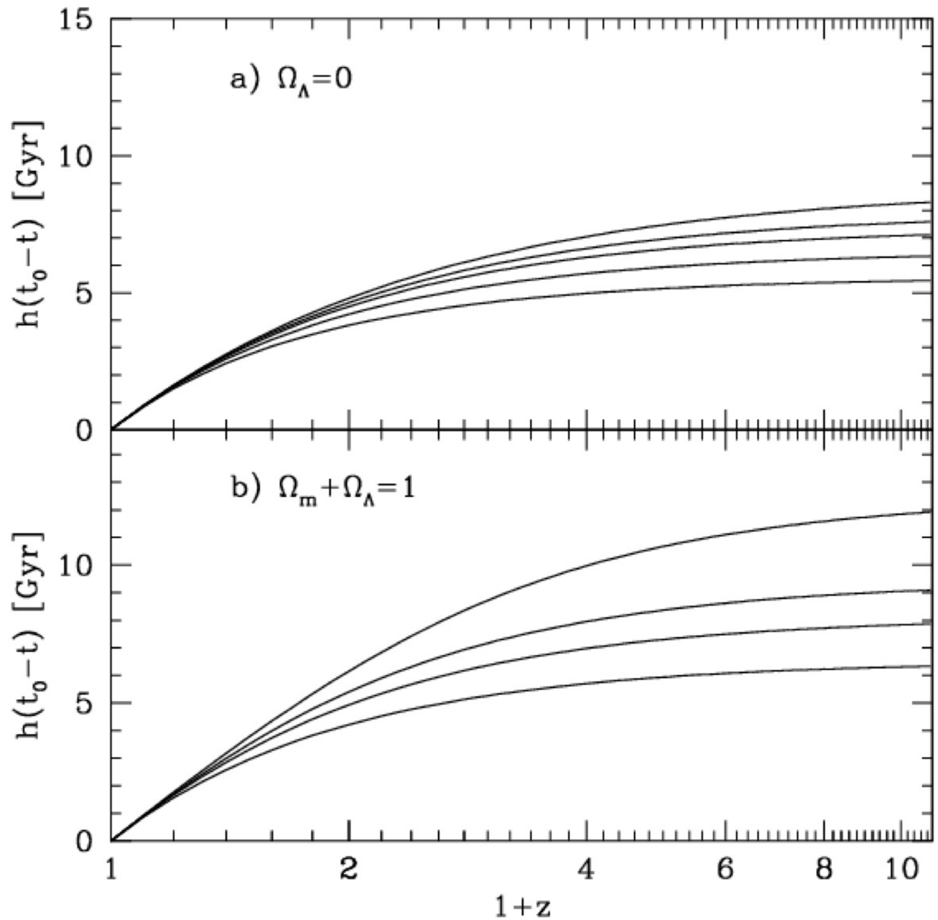
$$t(z) = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \ln\left[\frac{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}(1+z)^{-3}} + \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}(1+z)^{-3} + \Omega_{m,0}}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} \right].$$

Maailmankaikkeuden ikä III

- a)-kohdan kaikissa malleissa $\Omega_{\Lambda,0}$=0 ja ylhäältä alas $\Omega_{m,0}$=0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 2.0.
- b)-kohdan kaikissa malleissa: $\Omega_{m,0}$+$\Omega_{\Lambda,0}=1$ ja ylhäältä alas $\Omega_{m,0}$=0.1, 0.3, 0.5, 1.0.
- Suurilla punasiirtymillä (z>>1) kaikissa malleissa:

$$t(z) \approx \frac{2}{3H_0}\Omega_{m,0}^{-1/2}(1+z)^{-3/2}$$

- ΛCDM mallissa ikä on suurempi kuin $\Omega_{\Lambda,0}$=0 malleissa. Miksi? Tehtävä 3.5.



6.4 Maailmankaikkeuden etäisyydet I

- Johdimme edellisellä luennolla tulokset kulmaläpimitta- ja luminositeettietäisyydelle mukana-laajenevan koordinaatin r:n funktiona. Nyt mukana-laajeneva koordinaatti r pitää lausua havaittavan punasiirtymän funktiona. Käytetään ensin johdettua yhteyttä mukana-laajenevan etäisyyden ja konformaalin ajan välillä.

$$\chi(r) = \tau(t_0) - \tau(t) = c \int_{a(t)}^{a_0} \frac{da}{a\dot{a}}$$

- Mukana-laajeneva etäisyys punasiirtymän funktiona on tällöin:

$$\chi(r) = \frac{c}{H_0 a_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}$$

Maailmankaikkeuden etäisyydet II

- Nyt voimme johtaa kulmaläpimittaetäisyyden mukana-laajenevissa yksiköissä:

$$r = f_K \left[\frac{c}{H_0 a_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right]$$

$$f_K(\chi) = \sin\chi \ (K = +1); \ f_K(\chi) = \chi \ (K = 0); \ f_K(\chi) = \sinh\chi \ (K = -1)$$

- Kun $z \ll z_{eq}$ ja $\Omega_{\Lambda,0}=0$ a voidaan johtaa yleinen kaava kaikille kaarevuuksille K (Mattigin kaava):

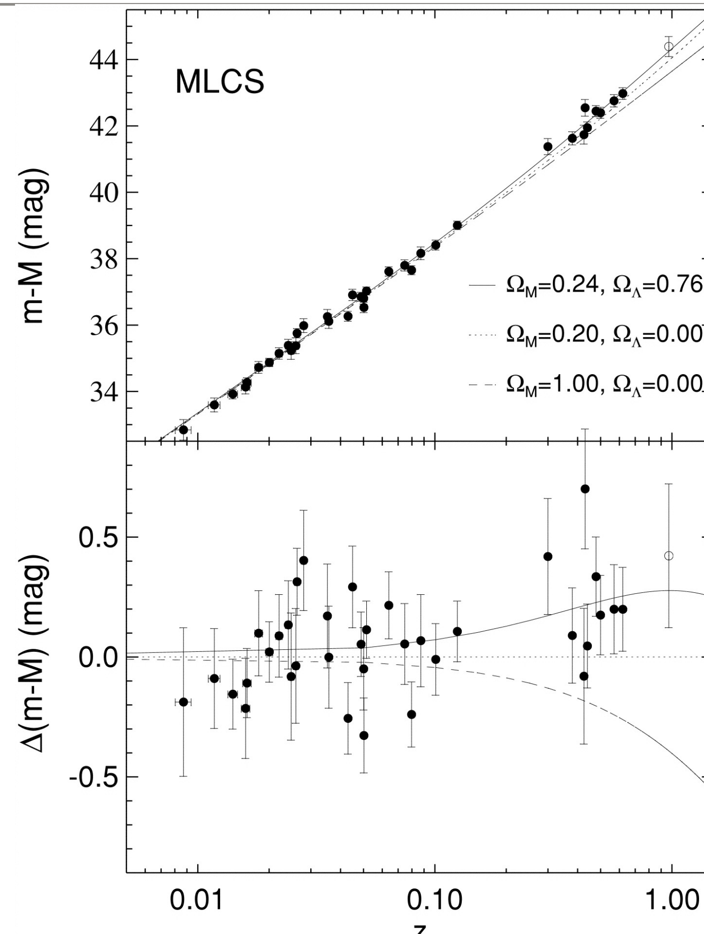
$$a_0 r = \frac{2c}{H_0} \frac{\Omega_0 z + (2 - \Omega_0)[1 - (\Omega_0 z + 1)^{1/2}]}{\Omega_0^2 (1+z)}$$

- Laakealle maailmankaikkeudelle ($\Omega_{m,0}+\Omega_{\Lambda,0}=1$) $r=\chi$:

$$a_0 r = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{[\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{m,0}(1+z)^3]^{1/2}}$$

Maailmankaikkeuden etäisyydet III

- Kosmologisia malleja ja maailman-kaikkeuden geometriaa voidaan tutkia havaitsemalla standardikynttilöitä suurilla etäisyyksillä.
- Aluksi käytettiin kefeiditähtiä, joita voidaan havaita muutamien kymmenien Mpc päähän. Pienillä etäisyyksillä $d_L \approx cz/H_0$ on lineaarinen, joten vain Hubblen vakio voidaan määrätä.
- Suurilla etäisyyksillä (z≥1) voidaan havaita esim. tyypin Ia supernovia ja mittausten avulla voidaan tutkia myös maailmankaikkeuden geometriaa.



Fysiikan Nobelin palkinto 2011

Mitä opimme?

1. Maailmankaikkeuden energiasisältö määrää laajenemis-nopeuden ja eri energiakomponentit kehittyvät eri lailla punasiirtymän funktiona.
2. Tämän hetkinen standardimalli on pimeän energian dominoiva ΛCDM malli, joka on geometrialtaan laakea Ω_0=1, Ω_m=0.3089, Ω_Λ=0.6911 ja h=0.6774.
3. Friedmannin yhtälöt ovat maailmankaikkeuden liikeyhtälöitä ja niiden avulla voidaan laskea laajenemisnopeus ja maailmankaikkeuden ikä mielivaltaisella punasiirtymällä.
4. Suurilla punasiirtymillä etäisyydet maailmankaikkeudessa riippuvat sen geometriasta. Mielivaltaiselle kosmologialle etäisyys saadaan numeerisesti integroimalla, erikoistapauksissa Ω_Λ=0 on olemassa yleinen kaava, niin kutsuttu Mattigin kaava.