Galaksit ja kosmologia FYS2052, 5 op, syksy 2023

E207 Physicum

Luento 5: Kosmologia I, 02/10/2023

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita I

- **Kalvo 3:** Isotrooppisessa maailmankaikkeudessa nopeuskentällä ei voi olla tiettyä suuntaa, vain puhtaasti radiaalinen liike (laajeneminen tai supistuminen) on sallittu:
$$\delta\mathbf{v} = H\delta\mathbf{x}$$
- **Kalvo 4:** Metriikalla mitataan kohteiden etäisyyksiä, esim. laakeassa Euklidisessa metriikassa:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita II

- **Kalvo 5:** Homogeenisen ja isotrooppisen maailmankaikkeuden metriikka on maksimaalisen symmetrinen.
  a(t): mittakaavatekijä, joka skaalaa etäisyyksiä
  K: Kaarevuustekijä, joko K=0 (laakea)
  K=+1 (suljettu ”pallopinta)
  K=-1 (avoin ”satulapinta)

$$dl^2 = a(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right]$$

- **Kalvo 5:** Metriikka saadaan johdettua vaihtamalla polaarikoordinaatistoon: $(x, y, z, w) \to (r, \vartheta, \varphi)$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita III

- **Kalvo 6:** Kaarevuuden ja R_0:n vastaavuus: $K = R_0^{-2}$

$K = +1, R_0 = 1$ (Pallopinta) $\mathrm{K} = 0, \mathrm{R}_0 \to \infty$ (Laakea) $\mathrm{K} = -1, \mathrm{R}_0 \to \mathrm{i}$ (Satulapinta)

- **Kalvo 7:** Yleisessä suhteellisuusteoriassa on 1 aika +3 paikka-ulottuvuutta. Metriikka joko +--- tai -+++. Tässä käytetään +--- notaatiota.
- **Kalvo 7:** Kahden Fundamentaali-havaitsijan välinen todellinen radiaalinen etäisyys: $d\vartheta = d\varphi = 0$

$$l = a(t)\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = a(t)\chi(r_1)$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita IV

- **Kalvo 6:** Kahden fundamentaali-havaitsijan etäisyys riippuu maailmankaikkeuden kaarevuudesta (K=0, K=+1 tai K=-1).
- **Kalvo 7:** Mukana-liikkuva etäisyys χ(r) ei muutu kahden fundamentaali-havaitsijan välillä, vaikka todellinen etäisyys muuttuukin maailmankaikkeuden laajenemisen takia.
- **Kalvo 7:** Konformaali-aika ottaa huomioon skaalatekijä a(t):n kehityksen ja on usein hyödyllisempi kuin kosminen aika t.

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{c\,dt'}{a(t')}$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita V

- **Kalvo 8:** Hubblen parametri

$$l = a(t)\chi(r) \Rightarrow \frac{dl}{dt} = \dot{a}(t)\chi(r) + a\dot{\chi}(r) = \dot{a}(t)\chi(r)$$

- **Kalvo 8:** Mukana-liikkuva etäisyys χ(r) ei muutu ajan funktiona.

$$\frac{dl}{dt} = H(t)l = H(t)a(t)\chi(r) \Rightarrow \dot{a}(t)\chi(r) = H(t)a(t)\chi(r) \Rightarrow H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

- **Kalvo 9**: Punasiirtymä, valonsäteet kulkevat radiaalisesti nolla-geodeesia pitkin: $ds = 0, d\vartheta = 0, d\phi = 0$

$$ds^2 = a^2(\tau)[d\tau^2 - d\chi^2 - f_K^2(\chi)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2)] \Rightarrow d\tau = d\chi$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita VI

- **Kalvo 9:** Punasiirtymä. Mukana-laajeneva etäisyys ei muutu:

$$\tau(t_0 + \delta t_0) - \tau(t_0) = \tau(t_e + \delta t_e) - \tau(t_e)$$

- **Kalvo 9:** Käytännössä $\delta t_e << t_e$ ja $\delta t_0 << t_0$. Konformaali-ajan määritelmää käyttäen:

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{c\,dt'}{a(t')}$$

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_e}{a(t_e)} \Rightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{\delta t_0}{\delta t_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita VII

- **Kalvo 10:** Kohteella voi olla myös oma ominaisnopeus (pekuliaarinopeus), mikäli se ei ole levossa fundamentaalihavaitsijan suhteen:

$$v(t) = \dot{a}(t)\chi(t) + a(t)\dot{\chi}(t) = v_{\mathrm{exp}} + v_{\mathrm{pec}}$$

- **Kalvo 10:** Epärelativistinen tapaus:

$$z_{\mathrm{pec}} = v_{\mathrm{pec}}/c \qquad z_{\mathrm{obs}} = z_{\mathrm{cos}} + \frac{v_{\mathrm{pec}}}{c}(1 + z_{\mathrm{cos}})$$

- **Kalvo 11:** Kulma-läpimittaetäisyys: FRW-metriikasta:

$$ds^2(\vartheta) = a^2(t) r^2 d\vartheta^2$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita VIII

- **Kalvo 12:** Luminositeettietäisyys
  Alkupiste 0, missä havainnot tehdään. Pinta-ala A_0:
  $$A_0 = \omega d_A^2 (a_0/a_e)^2 = (a_0 r_e)^2 \omega$$
  Saapuvien fotonien lukumäärä pinnan A_0 läpi hetkellä δt_0:
  $$\frac{F \delta t_0 A_0}{h_P \nu_0}$$
- **Kalvo 12:** Kohteen etäisyydellä pisteessä e emittoitujen fotonien määrä hetkellä δt_e:
  $$\frac{L \delta t_e \omega}{4\pi h_P \nu_e}$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita IX

- **Kalvo 12:** Fotonien lukumäärä sama pinnan A_0 ja A_e läpi:

$$d_L = a_0 r_e (1+z) = d_A (1+z)^2$$

- **Kalvo 13:** Kohteen pintakirkkaus ei säily laajenevassa maailmankaikkeudessa:

$$S = \frac{F}{\frac{1}{4}\pi\vartheta^2} = \frac{L}{4\pi d_L^2}\frac{d_A^2}{\frac{1}{4}\pi D^2} = \frac{L}{\pi^2 D^2}\frac{d_A^2}{d_A^2(1+z)^4} = \frac{L}{\pi^2 D^2}\frac{1}{(1+z)^4}$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita X

- **Kalvo 14:** Maailmankaikkeuden termodynamiikka:
  dU sisäisen energian muutos
  dQ järjestelmään tuotu tai poisviety lämpö
  dW järjestelmään tehty työ
  dS=dQ/T, missä S on entropia ja T lämpötila.
- **Kalvo 14:** Adiabaattinen laajeneminen dS=0 ja dW=-PdV

$$dU + PdV = 0; \quad dS = 0; \quad \text{tilavuudelle } V \propto a(t)^3$$

$$U = \rho c^2 a^3 \Rightarrow dU = c^2(a^3 d\rho + \rho 3a^2 da)$$

$$V = a^3 \Rightarrow dV = 3a^2 da$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XI

- **Kalvo 15:** Maailmankaikkeuden termodynamiikka:

$$dU + PdV = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{da} + 3\left(\frac{\rho + P/c^2}{a}\right) = 0$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\int \frac{da}{a} \Rightarrow \log\rho = -3(1+w)\log a \Rightarrow \rho \propto a^{-3(1+w)}$$

- **Kalvo 17:** Friedmannin yhtälöt (Newton):

$$M(<a) = \frac{4\pi}{3}\rho a^3 \Rightarrow \ddot{a}(t) = -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)a(t)$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XII

- **Kalvo 17:** Friedmannin yhtälöt (Newton): Kerrotaan tekijällä $\dot{a}(t)$ molemmin puolin:

$$\ddot{a}(t)\dot{a}(t) = -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)a(t)\dot{a}(t)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\dot{a}(t)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot 2\ddot{a}(t)\dot{a}(t)$$

$$\rho a(t)\dot{a}(t) = -\rho a^3(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a(t)}\right)$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XIII

- **Kalvo 18:** FRW2-yhtälö saadaan integroimalla ja FRW1 yhtälö huomioimalla, että paine p vaikuttaa myös tiheyden ρ lisäksi kappaleen energiaan ja täten massaan, lisäksi tulee pimeä energia-termi:

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi G}{3} a(t) \left[\rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2} \right]$$

- **Kalvo 19**: FRW yhtälöiden johto Yleisestä suhteellisuusteoriasta on ylikurssia ja luentomonisteessa hahmotellaan vain lyhyesti miten tämä tulisi tehdä. Tärkeintä tässä on huomata, että oikea malli maailmankaikkeudelle saadaan vain Yleistä Suhteellisuusteoriaa käyttäen.

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XIV

- **Kalvo 19:** Friedmannin yhtälöt (Einstein)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$$

- **Kalvo 19:** Einsteinin kenttäyhtälön kontraktio metrikaalla $g^{\mu\nu}$:

$$\Rightarrow R - \frac{1}{2}\cdot 4R - 4\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T$$

$$R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XV

- **Kalvo 20:** Friedmannin yhtälöt voidaan johtaa Yleisestä suhteellisuusteoriasta kun Ricci kaarevuustensorin aika-aika (R_{00}) ja paikka-paikka (R_{ij}, i,j=1-3) komponentit on laskettu yhdessä Ricci kaarevuusskalaarin kanssa.
- **Kalvo 20:** FRW1-yhtälö saadaan aika-aika komponentista ja FRW2-yhtälö paikka-paikka komponentista. Tarkemmat yksityiskohdat selitetään esim. Galaxy formation and evolution kurssilla ja Yleisen suhteellisuusteorian kurssilla.