Galaksit ja kosmologia FYS2052, 5 op, syksy 2023

Etäopetus Zoomissa

Luento 3: Galaksien dynamiikka I, 18/09/2023

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita

- Tämän materiaalin tarkoitus on toimia luentojen tukena.
- Asiat selitetään pääosin varsin hyvin varsinaisessa luentomonisteessa, mutta jossain tapauksissa laskujen välivaiheita on varsin vähän. Tätä puutetta pyritään paikkaamaan näiden kalvojen avulla.
- **Kalvo 4:** Potentiaalin määritelmä tiheyden yli integroitaessa:

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\int \frac{G\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita

- **Kalvo 5:** Poissonin yhtälön johto:

$$\oint_{\partial V} dA = 4\pi r^2$$

$$\int_V \nabla \cdot (-\nabla \Phi) dV = \int_V (-4\pi G\rho) dV$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita

- **Kalvo 6:** Newtonin teoreema 1:

$$F_1 = \frac{GM_1}{r_1^2} = \frac{G\Omega(SA)^2}{(SA)^2} \quad \& \quad F_2 = \frac{GM_2}{r_2^2} = \frac{G\Omega(SB)^2}{(SB)^2}$$

$$M_1 \propto \Omega r_1^2 \qquad M_2 \propto \Omega r_2^2 \qquad \Rightarrow F_1 = F_2$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita

- **Kalvo 6:** Newtonin teoreema 2:
- Pisteessä P Q’:sta tuleva potentiaali ϕ:

$$\Delta\phi[\mathbf{x}(P)] = -\frac{GM}{|\mathbf{x}(P) - \mathbf{x}(Q')|}\frac{\Delta\Omega}{4\pi}$$

- Pisteessä P’ Q:sta tuleva potentiaali ϕ’:

$$\Delta\phi'[\mathbf{x}(P')] = -\frac{GM}{|\mathbf{x}(P') - \mathbf{x}(Q)|}\frac{\Delta\Omega}{4\pi}$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita

- **Kalvo 6:** Newtonin teoreema 2:
- Symmetriasta:

$$PQ' = P'Q, \quad \Delta\Omega = \Delta\Omega \Rightarrow \Delta\phi[\mathbf{x}(P)] = \Delta\phi'[\mathbf{x}(P')]$$

- Integroimalla koko pallon yli:

$$\phi[\mathbf{x}(P)] = \phi'[\mathbf{x}(P')] = \phi'[\mathbf{x} = 0] = -\frac{GM}{r}$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita

- **Kalvo 8:** Energia ja pakonopeus:
- Lagrangen derivaatta (mukana-liikkuva derivaatta):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi$$

- Otetaan pistetulo **v**-vektorin kanssa:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + m\mathbf{v} \cdot \nabla \phi = 0$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita

- **Kalvo 8:** Energia ja pakonopeus:
- Lasketaan auki kineettisen energian aika-derivaatta:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right] = \frac{1}{2}m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} + \frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- Staattinen potentiaali, eli: $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$
- Energia säilyy radalla.
- Pistemassalle saadaan pakonopeudelle:

$$v_e^2 = -2\phi(\mathbf{x}), \quad v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\phi} \Rightarrow v_e = \sqrt{2}v_c$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita

- **Kalvo 9:** Liikemäärämomentti:

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times m\mathbf{v}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{x} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 + m\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\mathbf{x} \times \nabla\phi$$

- **Kalvo 13:** Viriaaliteoreeman sovelluksia:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\phi, \quad \langle \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha \rangle \approx 3\sigma_r^2 \Rightarrow E_k = \frac{3\sigma_r^2}{2}\left(\frac{M}{L}\right) L_{\mathrm{tot}}$$

$$2\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = 0 \Rightarrow 3\sigma_r^2 M = \frac{GM^2}{2r_c} \Rightarrow M \approx 6\sigma_r^2 r_c / G$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita

- **Kalvo 11:** Viriaaliteoreeman johto: Vasen termi

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{d^2}{dt^2}(m_\alpha \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\alpha) = \frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{d}{dt}(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\alpha + m_\alpha \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha) = \frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{d}{dt}(2m_\alpha \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha)$$

$$= \sum_\alpha (m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha + m_\alpha \mathbf{x}_\alpha \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{v}_\alpha) = \sum_\alpha \frac{d}{dt}(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \cdot \mathbf{x}_\alpha + \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha$$

- **Kalvo 11:** Viriaaliteoreeman johto: Oikean puolen 1. termi sadaan ottamalla keskiarvo α ja β-yhtälöiden yli:

$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha,\beta,\alpha\neq\beta} \frac{G m_\alpha m_\beta}{|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta|^3}(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta)\cdot \mathbf{x}_\alpha + \sum_{\alpha,\beta,\alpha\neq\beta} \frac{G m_\alpha m_\beta}{|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta|^3}(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha)\cdot \mathbf{x}_\beta\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\alpha\neq\beta} \frac{G m_\alpha m_\beta}{|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta|^3}(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta)\cdot(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta) = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\alpha\neq\beta} \frac{G m_\alpha m_\beta}{|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta|} = E_p$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita

- **Kalvo 16:** Vahvat vuorovaikutukset:

$$t_s = \frac{1}{n\pi r_S^2 V} = \frac{V^4}{n\pi 4G^2m^2V} = \frac{V^3}{4\pi G^2 m^2 n}$$

- **Kalvo 17:** Heikot vuorovaikutukset:

$$\mathbf{F}_\perp = \frac{GmM}{|\mathbf{r}^3|}\mathbf{r} = \frac{GmMb}{(b^2 + V^2t^2)^{3/2}}, \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{b^2 + V^2t^2}$$

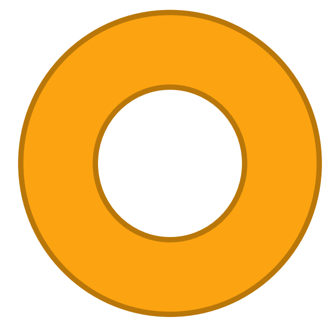
Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita

- **Kalvo 17:** Heikot vuorovaikutukset :

$$\Delta \mathbf{V}_\perp = \frac{1}{M}\frac{GmM}{b^2}\frac{b}{V}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{2Gm}{bV}, \quad x = \frac{Vt}{b}, \quad dx = \frac{V}{b}dt$$

- **Kalvo 18:** Tähdet vuorovaikuttavat ympyrärenkaassa olevien tähtien kanssa jonka tilavuus V on annettu alla. Renkaan säde on b ja renkaan paksuus on db.

$$\mathrm{Vol} = \mathrm{Area} \times \mathrm{length} = 2\pi \mathrm{bdb} \times \mathrm{Vt}$$



Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita

- **Kalvo 19:** Relaksaatioaika:

$$\langle \Delta V_\perp^2 \rangle = V^2$$

- **Kalvo 19:** Kun käytetään t_s:n määritelmää:

$$t_s = \frac{V^3}{4\pi G^2 m^2 n}$$

$$t_{\mathrm{relax}} = \frac{V^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln \Lambda} = \frac{t_s}{2 \ln \Lambda}$$