

Galaksit ja kosmologia – harjoitus 3 syksy 2023

Ratkaisut on palautettava ma 16.10. klo 12.00 mennessä kurssin Moodle-sivulle.

1. *Maailmankaikkeuden kriittinen tiheys ja massa-valo-suhde.*
 - (a) Laske maailmankaikkeuden kriittinen tiheys ρ_{crit} , eli $\Omega = 1$ arvoa vastaava tiheys. Käytä Hubble'n parametrille arvoa $h = 0.674$. Montako maapallon massaa kuutioparsekissa tämä kriittinen tiheys vastaa? Entä kuinka monta vetyatomia kuutiometrissä tämä olisi?
 - (b) Galaksien luminositeettifunktiosta on saatu integroimalla maailmankaikkeuden luminositeetti tiheydeksi arvo $\mathcal{L} = 1.4 \cdot 10^8 h L_{\odot} \text{Mpc}^{-3}$. Mikäli maailmankaikkeuden massatiheys vastaisi kriittistä tiheyttä, mikä olisi tällöin maailmankaikkeuden massa-valo-suhde (M/L)?
2. *Tiheysparametrit punasiirtymän funktiona* Tämän hetkiset Planckin mittaamat tiheysparametrien arvot ovat säteilylle $\Omega_{r,0} = 2.2 \cdot 10^{-5}$, aineelle (baryoninen aine + pimeä aine) $\Omega_{m,0} = 0.315$, pimeälle energialle $\Omega_{\Lambda,0} = 0.685$ ja maailmankaikkeuden kokonaisgeometria on laakea ($\Omega_0 = 1$). Lisäksi Hubble'n vakion tämän hetkinen arvo on $H_0 = 67.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Planckin nykyhetkellä $z = 0$ mittaamia arvoja hyödyntäen, mitkä olivat $\Omega_r(z)$, $\Omega_m(z)$, $\Omega_{\Lambda}(z)$ sekä $H(z)$:n vastaavat arvot punasiirtymillä $z = 1$ sekä $z = 10$?
3. *Kosminen mikroaaltotaustasäteily (CMB).* CMB on mustan kappaleen säteilyä jonka lämpötila on nykyään $T = 2.73 \text{ K}$.
 - (a) Etsi kirjallisuudesta mustan kappaleen säteilyn kokonaisenergiatiheyden lauseke, ja osoita että CMB:n kokonaisenergiatiheyden arvo on nykyään $\rho_{r,0} c^2 = 4.2 \cdot 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3}$. Kuinka suuri kokonaisenergiatiheys oli CMB:n irtikytkeytymisen hetkellä, jolloin CMB:n lämpötila oli noin 3000 K ? (*Huom.* $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$)
 - (b) Käytä hyväksi kaavaa

$$\rho_{m,0} = \Omega_{m,0} \rho_{\text{crit},0} \approx 1.88 \cdot 10^{-29} \Omega_{m,0} h^2 \text{ g cm}^{-3}$$

ja osoita että ajanhetki, jolloin aineen energiatiheys $\rho_m(z)c^2$ oli yhtä suuri säteilyn energiatiheyden kanssa, vastaa punasiirtymää $z_{\text{eq}} \approx 40000 \Omega_{m,0} h^2$.

4. *Maailmankaikkeuden hidastavuusparametri q määritellään $q = -a\ddot{a}/\dot{a}^2$. Johda q :lle yleinen lauseke punasiirtymän z funktiona derivoimalla Friedmannin yhtälöä*

$$\frac{1}{H_0^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}$$

ajan suhteen (säteilytermi $\Omega_{r,0}$ voidaan tässä unohtaa) ja osoita, että hidastavuusparametrin nykyinen arvo on:

$$q_0 = \frac{\Omega_{m,0}}{2} - \Omega_{\Lambda,0}$$

Laske millä punasiirtymällä $q(z) = 0$, kun $\Omega_{m,0} = 0.315$ ja $\Omega_{\Lambda,0} = 0.685$. Eli millä punasiirtymällä alkoi maailmankaikkeuden kiihtyvä laajeneminen?

5. *Maailmankaikkeuden ikä.* Toinen Friedmannin yhtälö voidaan lausua muodossa:

$$H(z) = \frac{\dot{a}(z)}{a(z)} = H_0 [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + (1-\Omega_0)(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}]^{\frac{1}{2}}$$

- (a) Ratkaise tästä yhtälöstä yleinen lauseke maailmankaikkeuden iälle punasiirtymän funktiona $t(z)$.
- (b) Laske Einstein–de Sitter maailmankaikkeuden ($\Omega_{m,0} = \Omega_0 = 1$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0$, $h = 0.674$) ikä punasiirtymillä $z = 0$, $z = 1$ ja $z = 6$.
- (c) Λ CDM maailmankaikkeudessa kosmologisten parametrien arvot ovat: $\Omega_{m,0} = 0.315$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0.685$, $\Omega_0 = 1$, $h = 0.674$. Laske Λ CDM maailmankaikkeuden ikä punasiirtymällä $z = 0$ ja selitä miksi se on erilainen kuin Einstein–de Sitter maailmankaikkeuden ikä. *Vihje: $\sinh^n(x)$ -muotoisesta muuttujanvaihdosta (missä n ei ole välttämättä kokonaisluku) saattaa olla hyötyä integroidessa.*