

Galaksit ja kosmologia – harjoitus 2 syksy 2023

Ratkaisut on palautettava ma 2.10. klo 12.00 mennessä kurssin Moodle-sivulle.

1. *Tähtien liike galakseissa.* Oletetaan pallomainen galaksi, jonka tiheys on vakio.
 - (a) Osoita tällöin, että ympyräradoilla kiertävät tähdet liikkuvat vakiokulmanopeudella, eli $\Omega(r) = V(r)/r = \text{vakio}$.
 - (b) Osoita, että mikäli tähti liikkuisi radiaalisella radalla (eli rata kulkisi suoraan galaksin keskustan läpi), se värähtelisi harmonisen oskillaattorin tavoin säteen suunnassa periodilla

$$P = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

2. *Plummerin potentiaali.* Pallomaisen Plummerin potentiaalin lauseke on

$$\Phi_P(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + a_P^2}},$$

missä a_P on jokin vakio.

- (a) Osoita että tämä potentiaali lähestyy pistemäisen massan potentiaalia suurilla r , eli kun $r \gg a_P$.
 - (b) Laske Plummerin potentiaalia vastaava tiheysjakauma $\rho(r)$ käyttäen Poissonin yhtälöä pallokoordinaateissa.
3. *Singular Isothermal Sphere (SIS).* Pimeän aineen halojen tiheyttä kuvataan usein isotermisellä jakaumalla:

$$\rho_{\text{SIS}}(r) = \frac{\rho(r_0)}{(r/r_0)^2},$$

missä r_0 on jokin vakio.

- (a) Osoita, että tässä mallissa massa säteen funktiona ei konvergoitu, vaan se kasvaa äärettömäksi kun $r \rightarrow \infty$. Osoita myös, että tässä mallissa ympyräradan rotaationopeus saa vakioarvon $V_{\text{SIS}}^2 = 4\pi G r_0^2 \rho(r_0)$.
 - (b) Osoita integroimalla Poissonin yhtälöä pallokoordinaateissa, että tätä tiheysjakaumaa vastaava potentiaali on

$$\Phi_{\text{SIS}}(r) = 4\pi G r_0^2 \rho(r_0) \ln(r/r_0)$$

4. Laske pallomaisen tähtijoukon ω Cen relaksaatioaika, kun oletetaan että joukko koostuu tähdistä, joiden keskimääräinen massa on $0.5M_\odot$. Joukossa mitattu tähtien nopeusdispersio on $\sigma_r = 13.2 \text{ km s}^{-1}$ ja ydinsäde $r_c \approx 4 \text{ pc}$. Käytä laskuissa arvoa $\Lambda = r_c/1 \text{ AU}$. Vertaa saatua arvoa maailmankaikkeuden ikään: onko ω Cen tähtijoukossa tapahtunut merkittävää relaksaatiota? *Vihje: Käytä viriaalteoreemaa ja aloita laskemalla tähtien lukumäärä tähtijoukossa.*
5. (a) Osoita käyttäen divergenssiteoreemaa, että potentiaali korkeudella z tasapaksuisen tason yläpuolella on

$$\Phi(\mathbf{x}) = 2\pi G \Sigma |z|,$$

missä Σ on pintatiheys (yksikkö $M_\odot \text{ pc}^{-2}$). Osoita että pystysuora voima ei riipu z -koordinaatista ja tarkista, että $\nabla^2 \Phi = 0$, kun $z \neq 0$.

- (b) Oleta että galaksin koko massa olisi ohuessa tasapaksuisessa kiekossa. Johda relaatiota

$$\frac{d}{dz}[n(z)\sigma_z^2] = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}n(z)$$

käyttäen lauseke tähtien numerotiheydelle $n(z)$ (yksikkö pc^{-3}) olettaen, että niillä on vakio z -suuntainen nopeusdispersio σ_z .