

Vektorianalyysi

Yleistentti 15.11.2012

1. Onko funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2)/\|x\|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

differentioituva origossa?

2. Osoitettava, että yhtälö $x^2 - ze^{x+y+z} = 0$ määrää jossain origon ympäristössä pinnan. Määritä origoon piirretyn tangenttitason yhtälö.
3. (a) Oletetaan, että funktiolla $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on osittaisderivaatat origossa kummankin muuttujan suhteen. Onko funktio f tällöin jatkuva origossa?
- (b) Kuinka määritellään funktion f derivaatta pisteessä x vektorin α , $|\alpha| = 1$, suuntaan?
4. Määritä funktion f , $f(x, y) = x^3 - xy^2$, suurin ja pienin arvo joukossa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.
5. Olkoon $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Laske integraali

$$\int_D (x^2 + y^2)^2 \cos(x^2 + y^2) \, dx dy.$$