Opettajalinjan työpaja (Topologia I) Syksy 2012.
Toinen välikoe 14.12.2012. Koeaikaa 2 tuntia.

Vastaa seuraavista kysymyksistä **enintään neljään**. Neljä ensimmäistä vastauspaperista löytyvää tehtävää arvostellaan asteikolla 0-6 pistettä. Tehtävissä saa käyttää kaikkia luennoilla todistettuja lauseita, mikäli tehtävänannossa ei toisin sanota. (Poislukien tietenkin tilanteet, joissa tehtävänanto on suoraan käsittelemämme tulos, eli tehtävään ei saa vastata “tämä on todistettu kurssilla”. Myöskään kurssilla käytettyjä esimerkkejä ei saa käyttää todistamatta.)

---

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Määrittele joukon A reunapisteiden joukko ∂A sekä joukon A sulkeuma $\overline{A}$. Todista määritelmiä käyttäen, että $\overline{A} = A \cup \partial A$.

2. Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus. Todista, että $A \subset X$ on täydellinen jos ja vain jos A on suljettu avaruudessa X.

3. Olkoon X joukko ja d sekä e sen kaksi metriikkaa.
   (a) Määrittele metriikoiden d ja e ekvivalenssi sekä bilipschitz-ekvivalenssi.
   (b) Anna esimerkki joukosta sekä sen kahdesta metriikasta, jotka ovat ekvivalentit mutta eivät bilipschitz-ekvivalentit.

4. Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus ja $f \colon X \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus. Todista, että kuvaus f saavuttaa avaruudessa X suurimman arvon.

5. Olkoon (X, d) metrinen avaruus.
   (a) Todista, että X on epäyhtenäinen jos ja vain jos on olemassa jatkuva surjektio $f \colon X \to \{0, 1\}$, missä maaliavaruudessa on käytössä diskreetti metriikka.
   (b) Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja $f \colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Todista, että jos X on yhtenäinen niin fX on yhtenäinen.

6. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia, $f \colon X \to Y$ kuvaus ja $\mathcal{U}$ äärellinen kokoelma suljettuja joukkoja B_i, $i = 1, \ldots, k$ joille pätee, että $\cup_{i=1}^{k} B_i = X$ ja että kuvaus $f|_{B_i} \colon B_i \to Y$ on jatkuva kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Todista, että kuvaus f on jatkuva.