Opettajalinjan työpaja (Topologia I) Syksy 2012.
Toinen välikoe 13.12.2012. Koeaikaa 2 tuntia.

Vastaa seuraavista kysymyksistä **enintään neljään**. Neljä ensimmäistä vastauspaperista löytyvää tehtävää arvostellaan asteikolla 0-6 pistettä. Tehtävissä saa käyttää kaikkia luennoilla todistettuja lauseita, mikäli tehtävänannossa ei toisin sanota. (Poislukien tietenkin tilanteet, joissa tehtävänanto on suoraan käsittelemämme tulos, eli tehtävään ei saa vastata "tämä on todistettu kurssilla". Myöskään kurssilla käytettyjä esimerkkejä ei saa käyttää todistamatta.)

---

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$.
   (a) Määrittele joukon A sisäpisteiden joukko $\operatorname{int} A$ sekä joukon A sulkeuma $\overline{A}$.
   (b) Todista avoimuuden määritelmää käyttäen, että joukko $\operatorname{int} A$ on avoin joukko avaruudessa X.
2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, missä d on diskreetti metriikka. Milloin avaruus (X, d) on
   (a) täydellinen?
   (b) kompakti?
   (c) yhtenäinen?

   Perustele vastauksesi.
3. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ homeomorfismi. Todista, että joukko $K \subset X$ on kompakti jos ja vain jos joukko $fK \subset Y$ on kompakti.
4. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Määritellään avaruuteen X uusi metriikka d_{raj} asettamalla
   $$d_{\mathrm{raj}}(x, y) = \min\{d(x, y), 5\}$$
   kaikilla $x, y \in X$. Todista, että metriikat d ja d_{raj} ovat ekvivalentteja ja että jokainen metrinen avaruus on homeomorfinen rajoitetun metrisen avaruuden kanssa.
5. Olkoon (X, d) yhtenäinen metrinen avaruus ja $f\colon X \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus. Todista, että jos on olemassa pisteet $x, y \in X$ joille pätee $f(x) = -1$ ja $f(y) = 1$, niin on olemassa sellainen piste $z \in X$, että $f(z) = 0$.
6. Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus ja $K \subset X$. Todista, että K on kompakti jos ja vain jos se on suljettu avaruudessa X.