Opettajalinjan työpaja (Topologia I) Syksy 2012.
Loppukoe 18.12.2012. Koeaikaa 4 tuntia.

Vastaa seuraavista kysymyksistä **enintään viiteen**. Viisi ensimmäistä vastauspaperista löytyvää tehtävää arvostellaan asteikolla 0-6 pistettä.

---

1. Mikäli (X, d) on metrinen avaruus ja $A \subset X$ on avoin, niin voiko millään $x \notin A$ päteä, että $A \cup \{x\}$ on avoin avaruudessa X?

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Määrittele käsitteet

   - avaruuden X suljettu osajoukko.
   - joukon A reunapisteiden joukko.

   Todista, että joukko A on suljettu avaruudessa X jos ja vain jos $\partial A \subset A$.

3. Todista, että metrisen avaruuden kompakti osajoukko on suljettu ja rajoitettu.

4. Määrittele käsitteet

   (a) Cauchyn jono.

   (b) Täydellinen metrinen avaruus.

   Todista, että jokainen suppeneva jono on Cauchyn jono.

5. Määrittele kahden metrisen avaruuden välinen Lipschitz-kuvaus. Todista, että jos (X, d) on metrinen avaruus ja $x_0 \in X$, niin kuvaus $f \colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, x_0)$ on Lipschitz.

6. Olkoon

   $$X = \{f \colon [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva } \}$$

   varustettuna sup-normin $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$ indusoimalla metriikalla. Todista, että joukko $A \subset X$,

   $$A = \{f \in X \mid f(x) > 0 \text{ kaikilla } x \in [0, 1]\}$$

   on avoin avaruudessa X. Mikä on sen sulkeuma?