

Opettajalinjan työpaja (Topologia I) Syksy 2012.
Loppukoe 14.12.2012. Koeaikaa 4 tuntia.

Vastaa seuraavista kysymyksistä **enintään viiteen**. Viisi ensimmäistä vastauspaperista löytyvää tehtävää arvostellaan asteikolla 0-6 pistettä.

1. Voiko missään metrisessä avaruudessa (X, d) olla voimassa, että

$$\overline{B}(x, r) = S(x, r)$$

jollain $x \in X$ ja $r \in \mathbb{R}_+$?

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Määrittele käsitteet

- avoin joukko.
- sisäpisteiden joukko.

Todista, että joukko A on avoin avaruudessa X jos ja vain jos $A = \text{int } A$.

3. Olkoon taso \mathbb{R}^2 varustettuna Manhattan-normin

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2|$$

indusoimalla metriikalla. Määritä kuulan $B((4, 8), 2)$ sisä-, reuna-, sekä ulkopisteet sekä sulkeuma.

4. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja $f: X \rightarrow Y$ kuvaus. Todista, että kuvaus f on jatkuva jos ja vain kaikilla avaruuden Y avoimilla osajoukoilla V pätee, että joukko $f^{-1}V$ on avoin joukko avaruudessa X .
5. Todista, että jokainen kompakti metrinen avaruus on täydellinen metrinen avaruus.
6. Olkoon

$$X = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva} \}$$

ja varustetaan X metriikalla

$$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

Määritellään kuvaus $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ kaavalla $\alpha(a) = f_a$, missä

$$f_a: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_a(x) = d(x, a).$$

Osoita, että kuvaus α on jatkuva.