HY Todennäköisyysteoria, syksy 2012, Kurssikoe (15.11.2012)

1. Olkoon $G(\omega)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja, eli

$$P(G \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

   (a) Laske $E_P\big(\exp(tG)\big) \in \mathbb{R}_+$, kun $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Laske $E_P\Big(\exp\big(G^2\, t/2\big)\Big) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, kun $t \in \mathbb{R}$.

2. Olkoon satunnaismuuttujat $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välissä $[0,1]$:

$$P(X_n \le x) = x \qquad \forall n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$$

   Olkoon $Y_n(\omega) = \max\big\{ X_k(\omega) : 1 \le k \le n\big\}$, $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Osoita ensin $Y_n \stackrel{P}{\longrightarrow} 1$, eli stokastisen konvergenssin mielessä.

   (b) Käytä Borel Cantellin lemma (kumpi?) osoittaakseen $Y_n(\omega) \longrightarrow 1$ myös P-melkein varmasti.

   (c) Osoita että $Y_n \stackrel{L^1(P)}{\longrightarrow} 1$ eli myös $L^1(P)$-konvergenssin mielessä.

3. Olkoon $X(\omega), X_n(\omega), n \in \mathbb{N}$, satunnaismuuttujat todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

   (a) Osoita: jos $X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)$ P-melkein varmasti ,
   seuraa $X_n \stackrel{d}{\longrightarrow} X$, eli jono suppenee jakauman mielessä.

   (b) Osoita: myös kun $X_n(\omega) \stackrel{P}{\longrightarrow} X(\omega)$ eli stokastisen konvergenssin mielessä, seuraa $X_n \stackrel{w}{\longrightarrow} X$, eli jono suppenee jakauman mielessä.
   Vihje: deterministiselle jonolle, $a_n \to a$ jos ja vain jos kaikille alijonolle $(a_{n_i} : i \in \mathbb{N})$, on olemassa alijonon alijono $(a_{n_{i_k}} : k \in \mathbb{N})$ jolla $a_{n_{i_k}} \to a$.

4. Olkoon $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ riippumattomia ja samoinjakautuneita satunnausmuuttujia kertymäfunktiolla $F(t) = P(X_i \le t)$, $i \in \mathbb{N}$.

   Otoksen $(X_1, \ldots, X_n)$ Empiirinen jakauma on satunnaisprosessi

$$F_n(t,\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(X_i(\omega) \le t) \qquad n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}$$

(a) Osoita: $E_P(F_n(t)) = F(t)$.

(b) osoita $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$F_n(t,\omega) \to F(t) \qquad P \text{ m.v. kun } n \to \infty$$

(c) Laske kovarianssi

$$\mathrm{Cov}(F_n(t), F_m(s)) = E_P\big\{\big(F_n(t,\omega) - F(t)\big)\big(F_m(s,\omega) - F(s)\big)\big\}$$

for $n, m \in \mathbb{N}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

(d) Osoita

$$\sqrt{n}(F_n(t) - F(t)) \xrightarrow{d} G(t)$$

(jakauman mielessä), jossa $G(t)$ on Gaussinen.
Mitkä ovat $E(G(t))$, $E(G(t)^2)$?

5. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

olkoon satunnaismuttuja $U(\omega) \in [0,1]$ tasaisesti jakautunut eli $P(U \in (a,b]) = (b-a)$ kun $(a,b] \subseteq [0,1]$, ja olkoon satunnaismuuuttuja $N(\omega)$ Poisson(1) jakautunut, siis

$$P(N = k) = \frac{\exp(-1)}{k!}$$

Oletamme että $N \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} U$, eli N ja U ovat rippumattomia satunnaismuuttujat P-mitan suhteen.

Olkoon satunnaismuuttuja $Y(\omega) := \big(U(\omega)\big)^{N(\omega)}$.

(a) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(Y|\sigma(U))(\omega)$.

(b) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(Y|\sigma(N))(\omega)$.

(c) Laske odotusarvo $E_P(Y)$.