HY Todennäköisyysteorian tentti (24.01.2013)

1. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujen jono.

   - Osoita jos $E_P(| X_n|^p) \to 0$, jollakin $0 < p < \infty$, $X_n \stackrel{P}{\to} 0$ stokastisesti. Vihje: muista Chebychevin epäyhtälö.
   - Osoita jos jono $X_n \stackrel{P}{\to} 0$ (stokastisesti), on olemassa deterministinen alijono $(n_k : k \in \mathbb{N})$ jolla $X_{n_k}(\omega) \to 0$ P-melkein varmasti.

     Vihje: muista Borel Cantellin lemma, ja valitse alijono jolla

     $$\sum_{k\in\mathbb{N}} P(|X_{n_k}| > \eta) < \infty$$

     .

2. Olkoon $\mathcal{C} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ satunnaismuuttujen kokoelma. Osoita että jos jollekin $p > 1$

   $$\sup_{X\in\mathcal{C}} E\big(|X|^p\big) < \infty,$$

   seuraa että $\mathcal{C}$ on tasaisesti integroituva.

3. Olkoon $G(\omega)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja jolla $E(G) = 0$, $E(G^2) = 1$, ja

   $$P(G \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\big(-y^2/2\big)dy$$

   Muistetaan myös että $E_P(\exp(tG)) = \exp(t^2/2)$.

   Osoita:

   - on olemassa $\varepsilon > 0$ jolla $E_P\big(\exp(\varepsilon G^2)\big) < \infty$
   - $E_P(|G|^p \exp(tG)) < \infty$, $\forall t, p > 0$.

   Olkoon $(F(t,\omega) :\ t \in \mathbb{R})$ satunnaismuuttujen perhe jolla jokaiselle ω:lle kuvaus $t \mapsto F(t,\omega)$ on n-kertaa derivoituva.

   Muistetaan että

   $$\frac{d^n}{dt^n}\left(\int_\Omega F(t,\omega)P(d\omega)\right) = \int_\Omega \frac{d^n}{dt^n} F(t,\omega)P(d\omega)$$

pisteessä t, ainakin kun on olemassa $\varepsilon > 0$ jolla satunnaismuuttujen kokoelma

$$\left\{ \frac{d^n}{ds^n} F(s,\omega), \quad s \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \right\}$$

on tasaisesti integroituva (tämä on riittävä ehto).

- Laske standardi Gaussisen satunnaismuuttujan momenttit

  $$E(G^n) = \frac{d^n}{dt^n} \mathbb{E}(\exp(tG)) \bigg|_{t=0}.$$

  Vihje: käytä sarja kehitelmä $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n/n!$.

  Perustele summan ja odotusarvon järjestyksen vaihto Fubinin lauseella sekä integroinnin ja derivoinnin järjestyksen vaihto tasaisella integroituvuudella.

4. Olkoon satunnaismuuttuja $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali-σ-algebra. $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ on satunnaismuuttujan varianssi

   $\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = E(X^2|\mathcal{G}) - E(X|\mathcal{G})^2$ on sen ehdollinen varianssi.

   Kun myös $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

   $\mathrm{Cov}(X, Y|\mathcal{G}) = E(XY|\mathcal{G}) - E(X|\mathcal{G})E(Y|\mathcal{G})$

   merkitsee X ja Y:n välinen ehdollinen kovarianssi.

   Osoita

   $$\mathrm{Var}(X) = E\big(\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})\big) + \mathrm{Var}\big(E(X|\mathcal{G})\big) \tag{0.1}$$

   Vihje: voit olettaa että $E(X) = 0$ koska yhtäläm oikean ja vasen puoli ei muutu kun korvataan X satunnaismuuttujalla $(X + c)$, jossa c on deterministinen vakio.

5. Olkoon $(X_n : n \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia ja samoin jakautuneita, jolla $E_P(|X_1|) = \mu < \infty$.

   Olkoon $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

   ja $\mathcal{G}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots,) = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$

   - Osoita: $E_P(X_1|\mathcal{G}_n)(\omega) = E_P(X_1|\sigma(S_n))(\omega) = S_n(\omega)/n$.

     Vihje: kun $1 \le k \le n$, symmetriasta seuraa $E_P(X_k|\sigma(S_n)) = E_P(X_1|\sigma(S_n))$.

Esitä niiden avulla $E_P(S_n|\sigma(S_n))$.

Oletamme nyt $E_P(X_1^2) = \mu^2 + \eta^2 < \infty$.

- Kun $n \geq 2$, osoita

$$\mathrm{Var}_P(X_1|\sigma(S_n)) = -(n-1)\mathrm{Cov}(X_1, X_2|\sigma(S_n)),$$

(vihje: $\mathrm{Var}(S_n|\sigma(S_n)) = 0$),

ja laske odotusarvo $E_P\Big(\mathrm{Var}_P(X_1|\sigma(S_n))\Big)$ Tehtävän 4 kaavan (0.1) avulla.