Todennäköisyyslaskenta, erilliskoe 24.1.2013

Kokeessa saa käyttää MAOL-taulukoita

1. Jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x) = k\,x, \quad \text{kun } 0 < x < 1$$

(ja nolla muuten).

a) Ratkaise vakion k arvo.

b) Laske jakauman kertymäfunktio ja kvantiilifunktio.

c) Laske todennäköisyys $P(\frac{1}{X} < 2)$.

2. Olkoot $X > 0$ ja $Y > 0$ riippumattomia ja positiivisia satunnaismuuttujia, joille odotusarvot EX ja $E(1/Y)$ ovat äärellisiä. Näiden oletusten perusteella yksi tai useampia seuraavista ominaisuuksista a, b tai c ovat välttämättä tosia ja muut eivät. (Jokin tai jotkut ominaisuuksista saattavat pitää paikkaansa tietyille oletukset täyttävillä jakaumille mutta eivät kaikille.) Kerro kunkin ominaisuuden kohdalla, pitääkö se välttämättä paikkansa vai ei. Jos vastaat ei, enna esimerkki jakaumasta (esim. diskreetistä jakaumasta) joka täyttää oletukset mutta jolle ominaisuus ei päde. Jos vastaat kyllä, anna lyhyt perustelu väitteesi tueksi.

$$\text{a) } E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{EX}{EY}, \text{ b) } E\left(\frac{X}{Y}\right) \le \frac{EX}{EY}, \text{ c) } E\left(\frac{X}{Y}\right) \ge \frac{EX}{EY}.$$

3. Olkoot U ja V riippumattomia välillä $(0,1)$ tasajakautuneita satunnaismuuttujia. Määritellään satunnaismuuttujat X ja Y kaavoilla

$$X = V, \qquad Y = U/V.$$

Laske satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio sekä satunnaismuuttujan Y reunatiheysfunktio.

KÄÄNNÄ

4.

a) Selitä, mitä tarkoitetaan, kun sanotaan, että symmetrinen matriisi $\mathbf{C}$ on *positiivisesti semidefiniitti.* (2 pistettä)

b) Olkoon $\mathbf{C}$ satunnaisvektorin $\mathbf{X}$ kovarianssimatriisi, $\mathbf{C} = \operatorname{Cov} \mathbf{X}$. Kirjoita matriisille $\mathbf{C}$ määritelmä odotusarvon avulla. Todista lisäksi, että $\mathbf{C}$ on symmetrinen ja positiivisesti semidefiniitti matriisi. (4 pistettä)

5. Olkoon $\mathbf{M}$ sellainen kiinteä $n \times p$-matriisi, että matriisilla $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ on olemassa käänteismatriisi. Olkoon lisäksi $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ kiinteä kerroinvektori. Satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ määritellään kaavalla

$$Y_i = \mathbf{m}_i^T \boldsymbol{\beta} + \epsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

jossa $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on jakauma $N(0, \sigma^2)$. Vaakavektori $\mathbf{m}_i^T$ on matriisin $\mathbf{M}$ i:s vaakarivi. Virhevarianssi $\sigma^2 > 0$ on kiinteä luku.

Tässä ns. lineaarisessa mallissa parametria $\boldsymbol{\beta}$ arvioidaan estimaattorilla

$$\mathbf{B} = (\mathbf{M}^T\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^T\mathbf{Y},$$

jossa $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$.

a) Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ jakauma? (Kerro jakauman nimi sekä jakauman parametrit).

b) Ilmaise $E\mathbf{B}$ ja $\operatorname{Cov} \mathbf{B}$ suureiden $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\beta}$ ja σ^2 avulla.

c) Mikä on estimaattorin $\mathbf{B}$ jakauma? (Kerro jakauman nimi ja parametrit.)