Tilastollinen päättely
Yleistentti 15.11.2012

Tentissä saa olla mukana kirjoitusvälineet ja laskin.

1. (a) Tarkastellaan tilastollista mallia $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})$. Miten määritellään (ehdollisen jakauman käsitteeseen perustuen) parametrin $\boldsymbol{\theta}$ tyhjentävä tunnusluku?

   (b) Olkoon $Y_1,\dots,Y_n$ riippumaton satunnaisotos $G(\kappa,\lambda)$-jakaumasta, jonka tiheysfunktio on
$$f(y;\kappa,\lambda)=\frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)}y^{\kappa-1}e^{-\lambda y},\ y>0,$$
   ja $\kappa>0$ ja $\lambda>0$ ovat tuntemattomia parametreja. Etsi kaksiulotteinen tyhjentävä tunnusluku parametrille $\boldsymbol{\theta}=(\kappa,\lambda)$.

2. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1,\dots,Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on
$$\begin{aligned} f(y;\theta) &= \frac{1}{\theta}I_{[0,\theta]}(y) \\ &= \frac{1}{\theta},\ 0\le y\le\theta,\ \theta>0. \end{aligned}$$

   a) Johda parametrille θ estimaattori momenttimenetelmän avulla.
   b) Johda parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori.
   c) Laske saatujen estimaattorien odotusarvot ja varianssit. Kumpi estimaattori on parempi? Perustele!

3. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat ovat $Y_1,\dots,Y_n\sim B(\theta)\perp\!\!\!\perp$ eli $Y_i\in\{0,1\}$ ja $P\{Y_i=1\}=\theta$ ja $P\{Y_i=0\}=1-\theta$ sekä $E(Y_i)=\theta$ ja $\mathrm{var}(Y_i)=\theta(1-\theta)$. Laske

   a) pistemääräfunktio
   b) havaittu informaatio
   c) Fisherin informaatio i) käyttäen pelkästään pistemääräfunktiota ja ii) käyttäen pelkästään havaittua informaatiota.

4. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1,\dots,Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on
$$f(y;\theta)=\theta^{-2}y\exp(-y/\theta),\quad y>0,$$
   jossa θ on positiivinen parametri. Kysymyksessä on gammajakauman erikoistapaus. Integroimalla nähdään, että $E(Y_i)=2\theta$ ja $\mathrm{var}(Y_i)=2\theta^2$. Johda uskottavuusosamäärän testi, Waldin testi ja pistemäärätesti nollahypoteesille $H_0:\ \theta=\theta_0$ kaksisuuntaista vaihtoehtoa $H_1:\ \theta\neq\theta_0$ vastaan.