Tariffiteoria 15.11.2012

1. Olkoon vakuutetun alkupääoma a_0 ja utiliteettifunktio u aidosti kasvava ja aidosti konkaavi. Vakuutettavalla kokonaisvahinkomäärällä X on jakauma

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0.8, \quad \mathbb{P}(X = 1) = 0.15, \quad \mathbb{P}(X = 10) = 0.05.$$

Vakuutetulla on mahdollisuus pitää omalla vastuullaan mielivaltainen osa X:stä. Jos tämä on X^{ov}, niin yhtiö perii vakuutusmaksun $P = \mathbb{E}(X - X^{ov})$.

Oletetaan, että vakuutettu pitää omalla vastuullaan odotusarvolla mitattuna p prosenttia kokonaisvahinkomäärästä, missä $p \in [40, 60]$. Määrää vakuutetun utiliteetin odotusarvon maksimoiva X^{ov}.

2. Riskikollektiivissa rakennemuuttujalla ϑ on tiheysfunktio u,

$$u(v) = \alpha e^{-\alpha v}, \quad v > 0,$$

missä $\alpha > 0$ on vakio. Vakuutetun kokonaisvahinkomäärä ehdolla $\vartheta = v$ on eksponenttijakautunut parametrilla v (tiheysfunktio ve^{-vx} alueessa $x > 0$). Määrää yhteen havaintovuoteen perustuva vakuutusmaksun Bayes-estimaattori. Mikä on yhteen havaintovuoteen perustuva credibility-maksu.

3. Yhtiön kaikkien vakuutettujen vakuutusmaksu määräytyy eksponentiaalisen tasoituksen periaatteella tasoitusparametrina $\alpha \in (0, 1)$. Olkoon X_n yhtiön vuoden n kokonaisvahinkomäärä ja P_n vuoden n vakuutusmaksu, $n = 1, 2, \dots$ ($P_1 = P$ on deterministinen vakio).

a) Osoita, että $P_n = \alpha(U_0 - U_{n-1}) + P$, $n \geq 1$, missä U_0 on yhtiön alkupääoma ja

$$U_n = U_0 + \sum_{j=1}^{n} (P_j - X_j), \quad n \geq 1.$$

b) Selosta hinnoitteluun liittyvää kontrollinäkökulmaa.

4. Olkoot $X, X_1, X_2, \dots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$P_n = N^{-1}(X_{n-1} + \cdots + X_{n-N}) + v,$$

missä $N \in \mathbb{N}$ on kiinteä, $X_0, X_{-1}, \dots, X_{-N+1}$ ovat deterministisiä vakioita ja $v > 0$ on varmuuslisä. Olkoon U_0 yhtiön alkupääoma, $V_n = X_n - P_n$ vuoden n tappio,

$$Y_n = V_1 + \cdots + V_n, \quad n \geq 1,$$

kumulatiivinen tappio ja $T = T(U_0)$ vararikkohetki.

Oletetaan, että $\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) < \infty$, kun $t < t_0$, ja $\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \infty$, kun $t > t_0$, missä $t_0 \in (0, \infty)$. Määrää

$$\limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty).$$