Tariffiteoria 22.10.2012

1. Vakuutetun n kokonaisvahinkomäärä on X_n, alkupääoma a_n ja utiliteettifunktio u_n,

$$u_n(x) = \mu_n^{-1}\left(1 - e^{-\mu_n x}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

missä $\mu_n > 0$ on vakio, $n = 1, \ldots, N$. Kokonaisvahinkomäärät $X_1, \ldots, X_N$ ovat riippumattomia. Yhtiön alkupääoma on A_0 ja utiliteettifunktio U,

$$U(x) = \mu_0^{-1}\left(1 - e^{-\mu_0 x}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

missä $\mu_0 > 0$ on vakio. Oletetaan, että $\mathbb{P}(X_n = 0) > 0$ ja että $\mathrm{Var}(X_n) > 0$ kaikilla $n = 1, \ldots, N$. Lisäksi oletetaan, että $\mathbb{E}\left(e^{sX_n}\right)$ on äärellinen kaikilla $s > 0$ ja kaikilla $n = 1, \ldots, N$.

Osoita, että tasapainotilassa vakuutetun n korvausfunktio $\bar{r}_n$ määräytyy ehdosta

$$\bar{r}_n(X_n) = \frac{\mu_n}{\mu_0 + \mu_n} X_n \quad \text{m.v.}$$

2. Riskikollektiivissa rakennemuuttujalla ϑ on tiheysfunktio u,

$$u(v) = h^{-1} v e^{-\alpha v}, \quad v > 0,$$

missä $\alpha > 0$ on vakio ja $h = \int_0^\infty v e^{-\alpha v} dv$. Vakuutetun kokonaisvahinkomäärä ehdolla $\vartheta = v$ on eksponenttijakautunut parametrilla v. Määrää yhteen havaintovuoteen perustuva vakuutusmaksun Bayes-estimaattori. Mikä on yhteen havaintovuoteen perustuva credibility-maksu.

3. Vakuutetun vakuutusmaksu määräytyy eksponentiaalisen tasoituksen periaatteella tasoitusparametrina $\alpha \in (0, 1)$. Olkoon X_n vuoden n kokonaisvahinkomäärä ja P_n vuoden n vakuutusmaksu, $n = 1, 2, \ldots$ (P_0 on deterministinen vakio). Oletetaan, että $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Olkoon $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ ja $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Määrää

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(P_n) \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(P_n).$$

4. Yhtiön vuotuiset kokonaisvahinkomäärät $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia. Olkoon yksittäisen vahingon suuruuden momentit generoiva funktio M kaikkina vuosina. Oletetaan, että M on äärellinen koko $\mathbb{R}$:ssä. Vuoden n Poisson-parametri λ_n on

$$\lambda_n = \left(1 + a \sin\left(\frac{2\pi n}{k}\right)\right) \lambda,$$

missä $a \in [0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$ ja $\lambda > 0$ ovat vakioita. Vuoden n vakuutusmaksu olkoon $P_n = (1 + v)\mu$, missä $\mu = \lambda m$ ja $m > 0$ on yksittäisen vahingon suuruuden odotusarvo sekä $v > 0$ on vakio. Osoita, että yhtiön tappioprosessiin liittyvä Lundbergin eksponentti on yhtälön

$$M(t) - 1 - (1 + v)mt = 0$$

yksikäsitteinen positiivinen juuri.