

STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

## Yleistentti 24.1.2013 (uusintakuulustelu)

*Vastaa neljään kysymykseen. Palauta kysymykset ja taulukot. Kiitos!*

1. Hallin ja Saidi (2007)<sup>1</sup> estimoivat (reaaliselle) bruttokansantuotteelle ( $\Delta y_{1t} = y_{1t} - y_{1t-1}$ ) ja (nimelliselle lyhyelle) korolle ( $y_{2t}$ ) Kanadassa mallit

$$\Delta y_{1t} = 2552.456 + 0.345\Delta y_{1t-1} + \hat{\varepsilon}_{1t}, \quad \hat{\sigma}_1 = 3545.353$$

ja

$$y_{2t} = 1.298 + 0.872y_{2t-1} + \hat{\varepsilon}_{2t} - 0.307\hat{\varepsilon}_{2t-1}, \quad \hat{\sigma}_2 = 1.273.$$

Yllä  $\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma_i^2)$ , " $\hat{\varepsilon}$ " osoittaa estimoitua suuretta ja  $\hat{\sigma}_i$  on vastaavan estimoidun innovaation keskihajonta ( $i = 1, 2$ ). Havainnot ovat neljännesvuosittaisia 1970–1989 (80 havaintoa). Mallit läpäisevät diagnostiset testit. Oletetaan onnellinen tilanne, että mallit täsmäävät täydellisesti aineistot tuottaneiden prosessien kanssa.

a) Ovatko prosessit  $\Delta y_{1t}$  ja  $y_{2t}$  heikosti stationaarisia? Perustele.

b) Laske prosessien odotusarvot  $E(\Delta y_{1t})$  ja  $E(y_{2t})$ . Ovatko odotusarvot vakioita? Perustele.

c) Selitä huolellisesti, miten prosessien autokorrelaatiofunktiot käyttäytyvät (yksityiskohtaista kaavaa ei tarvitse muistaa jälkimmäisen prosessin kohdalla). Laske  $\Delta y_{1t}$ :n neljä ensimmäistä autokorrelaatiota. Saat ylimääräisen pisteen, jos osaat laskea  $y_{2t}$ -prosessin neljä ensimmäistä autokorrelaatiota.

---

<sup>1</sup>Optimal Tests of Noncorrelation Between Multivariate Time Series. *J. American Statistical Association*, 102, 938–951.

2. Tutkitaan edellisen tehtävän prosessien ennustamista. Olkoot aikasarjojen viimeiset tunnetut arvot  $\Delta y_{1T} = 4000$  ja  $y_{2T} = 10$ . Koska prosessien parametrit ovat tunnettuja, voidaan helposti laskea jälkimmäisen prosessin viimeisen innovaation  $\varepsilon_{2T}$  arvo. Olkoon se 1. Laske ennusteet eli ehdolliset odotusarvot  $E(\Delta y_{1t+1} | \Delta y_{1t}, \Delta y_{1t-1}, \dots)$ ,  $E(\Delta y_{1t+2} | \Delta y_{1t}, \Delta y_{1t-1}, \dots)$ ,  $E(y_{2t+1} | y_{2t}, y_{2t-1}, \dots)$  ja  $E(y_{2t+2} | y_{2t}, y_{2t-1}, \dots)$ . (Vihje1:  $\hat{y}_{t+s|t} - \mu = \phi(\hat{y}_{t+s-1|t} - \mu)$ , jos  $s = 2, 3, \dots$ . Vihje2:  $\phi + \theta = \phi(1 + \theta L) + \theta(1 - \phi L)$ .) Konvergoivatko ennusteet johonkin lukuihin ennusteajanjakson etääntyessä kohti ääretöntä ja jos konvergoivat niin mihin?

3. Saakoon prosessin  $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$  alkuarvo  $y_0$  arvon 1 todennäköisyydellä  $1/2$  ja arvon  $-1$  todennäköisyydellä  $1/2$ . Myöhemmät  $y_t$ :n arvot määräytyvät kaavan

$$y_t = (-1)^t y_0, \quad t = 1, 2, \dots,$$

mukaisesti.

a) Johda  $y_t$ :n odotusarvo, varianssi ja autokovarianssifunktio.

b) Onko  $y_t$  heikosti stationaarinen prosessi? Perustele. Kuoleentuuko stationaarisen prosessin autokorrelaatiofunktio aina suurilla viipeillä?

c) Johda ennuste yllä olevaa kaavaa noudattavalle  $y_{t+1}$ :lle käyttämällä keskineliövirheen mielessä optimaalisen lineaarisen ennusteen yleisiä tuloksia ja ehdollistavana informaationa  $y_t$ :tä (ei vakiota). (Voit tietenkin johtaa myös edellä mainitun yleisen tuloksen, jos haluat.) Mikä on ennusteen keskineliövirhe?

4. Selitä pääpiirteissään AR(1)-mallin estimointi eksaktilla SU- ja ehdollisella SU-menetelmällä (exact maximum likelihood ja conditional maximum likelihood), kun innovaatiot ovat normaalijakautuneita. Vertaile menetelmien hyviä ja huonoja puolia.

5.

a) Eräessä opinnäytteessä kirjoitettiin: "Lisäksi ARMA( $p, q$ )-prosessien tapauksessa täytyy tehdä rajoitus, että AR- ja MA-osan parametrejä ei ole samansuuruisia, koska tämä aiheuttaisi ongelmia yritettäessä estimoida parametrien arvoja (ks. esim. Hamilton 1994, 60–61)." Pitääkö väite paikkansa. Perustele.

b) Mikä on Box–Ljung-testisuure? Mitä sillä testataan? Mitä jakaumaa se noudattaa eri testaustilanteissa?

**Aputulos:**

$$\hat{\mathbb{E}}(y_{t+1} | y, y_{t-1}, \dots) = \mu + \left[ \frac{\psi(L)}{L^s} \right]_+ \frac{1}{\psi(L)} (y_t - \mu),$$