

Sijoitustoiminnan matematiikka 22.10.2012

1. Markkinoilla on nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$ ja osakkeet A ja B . Osakkeen A hinta hetkellä nolla on p_A ja arvo hetkellä yksi S_A . Vastaavat suuret osakkeelle B ovat p_B ja S_B . Lisäksi markkinoilla on vaihto-optio, jonka haltijalla on oikeus vaihtaa yksi osake A yhteen osakkeeseen B vuoden kuluttua. Option hinta hetkellä nolla on r . Markkinat ovat arbitraasivapaat.

Lisätään markkinoille arvopaperi, jonka haltija saa vuoden lopussa summan $\max(S_A, S_B)$. Määrää arvopaperin kaikki arbitraasivapaat hetken nolla hinnat.

2. Kahden periodin markkinamallissa on kaksi arvopaperia. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorkona $i = 0$ (molemmilla periodeilla). Arvopaperi 2 on osake, jonka hetken nolla hinta on p ja arvo hetkellä k $S_2(k)$, $k = 1, 2$. Osakkeen mahdolliset arvokehitykset $(S_2(1), S_2(2))$ ovat (α, α_2) , (α, β_2) ja (β, β_1) . Oletetaan, että $\alpha < \beta_1 < \beta$ ja $\alpha_2 < \beta_2$ ja että $p \in (\alpha, \beta)$, $\alpha \in (\alpha_2, \beta_2)$. Tutkittava, ovatko markkinat arbitraasivapaat.

3. Markkinoiden riskitön korko on 3 prosenttia. Riskillisiä arvopapereita on kolme kappaletta. Merkitään näitä symboleilla 1, 2 ja 3. Olkoon p_n arvopaperin n hinta hetkellä 0 ja r_n tulevaa vuotta koskeva tuottoasteen odotusarvo. Nämä ovat seuraavan taulukon mukaiset.

n	p_n	r_n
1	100	0.1
2	200	0.1
3	400	0.2.

Riskillisten arvopapereiden tuottoasteiden kovarianssimatriisi on kääntyvä.

Hetkellä 0 toimija on sijoittanut riskittömään arvopaperiin 1 200 euroa. Lisäksi arvopaperisalkussa on 2 kappaletta arvopaperia 1, 1 kappale arvopaperia 2 ja 1 kappale arvopaperia 3.

a) Määrää toimijan salkun odotustuotto.

b) Oletetaan, että mainittu toimijan salkku antaa minimaalisen tuottoasteen varianssin kyseisellä odotustuotolla. Suorita sijoitusten uudelleenallokointi siten, että odotustuotto on 12.6 % ja tuottoasteen varianssi minimoituu.

4. Osoita, että finanssimarkkinoiden tasapainotilassa salkkujen allokointi on välttämättä Pareto-optimaalinen.

5. Jälleenvakuutusmarkkinoilla on K toimijaa. Toimijan k alkupääoma on U_k ja vakuutettava kokonaisvahinkomäärä X_k . Kaikkien toimijoiden utiliteettifunktio on u , joka on kaikkialla aidosti kasvava ja aidosti konkaavi. Osoita, että markkinoilla on ainakin yksi Pareto-optimaalinen tila.