

Sijoitustoiminnan matematiikka 15.11.2012

1. Tarkastellaan markkinoita, joilla on kaksi arvopaperia. Toinen on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i = 0$ ja toinen osake, jolla on kolme mahdollista arvoa hetkellä 1, nimittäin 0, 2 ja 3. Osakkeen hinta hetkellä 0 on 1.

a) Osoita, että markkinat ovat arbitraasivapaat.

b) Lisätään markkinoille optio, jonka haltijalla on oikeus ostaa 1 eurolla yksi osake hetkellä 1. Määrittää option arbitraasivapaat hetken 0 hinnat.

2. Kahden periodin markkinamallissa on kaksi arvopaperia. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorkona $i = 0$ (molemmilla periodeilla). Arvopaperi 2 on osake, jonka hetken nolla hinta on p ja arvo hetkellä k $S_2(k)$, $k = 1, 2$. Osakkeen mahdolliset arvokehitykset $(S_2(1), S_2(2))$ ovat $(\alpha, \alpha_2), (\alpha, \beta_2), (\beta, \alpha_1)$ ja (β, β_1) . Oletetaan, että

$$\alpha < \beta, \quad \alpha_1 < \beta_1, \quad \alpha_2 < \beta_2, \quad p \in (\alpha, \beta), \quad \alpha \in (\alpha_2, \beta_2), \quad \beta \in (\alpha_1, \beta_1).$$

a) Määrittää markkinoiden kaikki riskineutraalit todennäköisyysmitat sopivassa nelitilaisessa todennäköisyyskentässä.

b) Tutki, pystytäänkö sopimus $X = \max(S_2(2) - S_2(1), 0)$ toistamaan.

3. Markkinoilla on arvopaperit $1, \dots, N$, joiden hetken yksi arvot ovat $S_1(1), \dots, S_N(1)$. Markkinoilla on $K \geq 1$ identtistä toimijaa ts. alkuallokoinnit ja utiliteettifunktiot ovat samat kaikilla toimijoilla. Osoita, että markkinoilla on tasapainotila, kun yhteinen utiliteettifunktio oletetaan aidosti kasvavaksi ja konkaaviksi.

4. Olkoon markkinoilla N riskillistä arvopaperia. Odotustuottoa r vastaava minimaalinen tuottoasteen varianssi on

$$\sigma^2(r) = a(r - r_0)^2 + \sigma_0^2,$$

missä a, r_0 ja σ_0 ovat positiivisia vakioita. Lisätään markkinoille arvopaperi $N + 1$, jonka odotustuotto on suurempi kuin r_0 ja tuottoaste stokastisesti riippumaton markkinoiden muiden arvopapereiden tuottoasteista. Olkoon $r > r_0$. Osoita, että syntyneillä markkinoilla on mahdollista konstruoida salkku, jonka tuottoasteen odotusarvo on r ja varianssi pienempi kuin $\sigma^2(r)$.

5. Jälleenvakuutusmarkkinoilla yhtiön k utiliteettifunktio on u_k , alkupääoma U_k ja alkuperäinen kokonaisvahinkomäärä X_k , $k = 1, \dots, K$. Olkoon $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_K)$ clearing-ehdon täyttävä allokointi ja $\bar{\phi}$ positiivinen satunnaismuuttuja. Oletetaan, että $\mathbb{E}(\bar{\phi} \bar{X}_k) = \mathbb{E}(\bar{\phi} X_k)$ ja

$$u'_k(U_k - \bar{X}_k) = \mathbb{E}(u'_k(U_k - \bar{X}_k)) \bar{\phi}$$

kaikilla $k = 1, \dots, K$. Osoita, että $(\bar{\phi}, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_K)$ on markkinoiden tasapainotila.