

Riskiteorian jatkokurssi 15.11.2012

1. Määrittele Sparre-Andersenin malli. Miten äärettömän aikajänteen vararikkotodennäköisyyden arviointi mallissa voidaan palauttaa diskreettiaikaisen vararikkotodennäköisyyden arviointiin.

2. Olkoon $Y_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, missä ξ, ξ_1, ξ_2, \dots ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Olkoon $U_0 > 0$ yhtiön alkupääoma ja $T = T(U_0)$ vararikohetki. Oletetaan, että $\mu = \mathbb{E}(\xi) \in (-\infty, 0)$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$, ja että

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x(1 - \varepsilon))}{\overline{F}(x)} = 1.$$

Olkoon $N \in \mathbb{N}$ kiinteä. Osoita, että

$$\limsup_{U_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(T \leq N)}{N \overline{F}(U_0)} \leq 1.$$

3. Olkoot d, d_1, d_2, \dots ja ξ, ξ_1, ξ_2, \dots kaksi jonoa riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $\mathbb{P}(d > 0) = 1$ ja että on olemassa sellainen yksikäsitteinen $R' > 0$, että $\mathbb{E}(d^{R'}) = 1$. Oletetaan lisäksi, että ξ -muuttujat ovat riippumattomia d -muuttujista ja että $\mathbb{E}(|\xi|^s) < \infty$ kaikilla $s \in \mathbb{R}$. Olkoon

$$Y'_n = \sum_{j=1}^n d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j, \quad n \in \mathbb{N}$$

ja $\overline{Y}' = \sup\{0, Y'_1, Y'_2, \dots\}$.

Osoita, että $\mathbb{E}((\overline{Y}')^s) < \infty$ kaikilla $s \in (0, R')$. Minkälaisia johtopäätöksiä tämän perusteella voidaan tehdä vararikkotodennäköisyydestä $\mathbb{P}(\overline{Y}' > U_0)$.