

Riskiteorian jatkokurssi 22.10.2012

1. Olkoon $\alpha \in (0, 1/2)$ vakio ja vuotuinen tappio $\xi = X - P$, missä $P = 1$ ja X :llä on geometrinen jakauma,

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - \alpha)\alpha^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Olkoon c muuttujan ξ kumulanttifunktio. Olkoot ξ_1, ξ_2, \dots riippumattomia ja samoin jakautuneita kuin ξ . Olkoon edelleen $Y_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ ja T satunnaiskulkuun $\{Y_n\}$ liittyvä vararikko hetki alkupääomalla U_0 . Oletetaan, että $U_0 \in \mathbb{N}$.

a) Osoita, että yhtälöllä $c(s) = 0$ on yksikäsitteinen positiivinen juuri R .

b) Olkoon $\beta = \alpha e^R$. Osoita, että

$$\mathbb{P}_R(Y_T - U_0 = N) = (1 - \beta)\beta^{N-1}, \quad N = 1, 2, \dots$$

2. Olkoon $Y_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, missä ξ, ξ_1, ξ_2, \dots ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Lisäksi $U_0 > 0$ kuvaa yhtiön alkupääomaa ja T on satunnaiskulkuun $\{Y_n\}$ liittyvä vararikko hetki. Oletetaan, että $\mu = \mathbb{E}(\xi) \in (-\infty, 0)$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$, ja että

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x(1 - \varepsilon))}{\bar{F}(x)} = 1.$$

Olkoon $b > 0$ kiinteä. Osoita, että

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0) \geq (1 + o(1)) \int_0^{bU_0} \bar{F}(U_0 - \mu t) dt.$$

3. Olkoot d, d_1, d_2, \dots ja ξ, ξ_1, ξ_2, \dots kaksi jonoa riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan myös, että ξ -muuttujat ovat riippumattomia d -muuttujista ja että on olemassa sellainen yksikäsitteinen $R' > 0$, että $\mathbb{E}(d^{R'}) = 1$. Olkoon edelleen

$$Y'_n = \sum_{j=1}^n d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j, \quad n \in \mathbb{N}$$

ja $\bar{Y}' = \sup\{Y'_1, Y'_2, \dots\}$. Oletetaan tunnetuksi, että $\bar{Y}' < \infty$ m.v.

a) Osoita, että $\bar{Y}' =_L \xi + d \max(0, \bar{Y}')$.

b) Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{P}(\xi \geq 0) = 1$ ja että $R' > 1$. Määrä $\mathbb{E}(\bar{Y}')$ muuttujien d ja ξ origomomenttien avulla.

c) Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{P}(\xi \geq 0) = 1$ ja että $R' > k$, missä $k \in \mathbb{N}$. Esitä rekursiivinen menettely momentin $\mathbb{E}((\bar{Y}')^k)$ määrittämiseksi.