HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, syksy 2012, yleinen tentti ja toinen välikoe (15.11.2012)

HUOMAUTUS: Jos olet suorittanut kurssin ensimmäistä välikokeetta tänä vuonna, suoritat kurssin toista välikokeetta ratkaisemalla tehtävät 3 ja 4, muuten ratkaiset kaikki tehtävät.

Tenttiaikaa on neljä tuntia kaikille. Taskulaskinta saa käyttää.

1. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus ja $\varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(\omega)$ P:n suhteen stokastisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujat jolla

$$P(\varepsilon_i = 1) = 1 - P(\varepsilon_i = 0) = 1/2 \quad i = 1, 2$$

Kasitellään yhden perioodin markkinamalli $(B_t, S_t, X_t : t = 0, 1)$ jossa riskitön instrumentti on $B_t = (1 + r)B_0 > 0$, $S_t(\omega)$, $X_t(\omega)$ ovat osakeinstrumentteja jossa $B_0 = S_0 = X_0 = 1$ ja

$$S_1(\omega) = (1 + d + (u - d)\varepsilon_1(\omega))(1 + d + (u - d)\varepsilon_2(\omega))$$
$$X_1(\omega) = (1 + u + (d - u)\varepsilon_1(\omega))(1 + u + (d - u)\varepsilon_2(\omega))$$

jossa $d = -1/5$, $r = 1/5$, $u = 2/5$.

   (a) Onko malli (B_1, S_1, X_1) alkuhinnoilla (B_0, S_0, X_0) arbitraasivapaa ?

   (b) Onko malli täydellinen ?

   Vihje Vaikka Ω on abstrakti todennäköisyysavaruus, voidaanko kuvata tätä mallia äärellisessä todennäköisyysavaruudessa, ja montako tilaa siihen tarvitaan ?

   (c) Laske arbitraasivapaiden hintojen joukko swap optiolle $F(\omega) = \big(S_1(\omega) - X_1(\omega)\big)^+$.

2. Yleisessä todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon käytettävissa

   osakeinstrumentti $S_t(\omega)$ ja riskitön pankkitili $B_t = (1 + r)^t B_0$, $t \in \{0, 1\}$,

   ja näiden lisääksi eurooppalaiset osto-optiot $(S_1(\omega) - K)^+$ ja myyntioptiot $(K - S_1(\omega))^+$, alkuhinnoilla $c^{call}(K)$, $c^{put}(K)$ jokaisella lunastushinnalla K. Oletataan että tämän yhden perioodin mallin hintasysteemi on arbitraasi-vapaa.

Olkoon $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow R_+$ palottain lineaarinen funktio

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} (a_j x + b_j) \mathbf{1}(k_{j-1} \le x < k_j)$$

jossa $k_0 = 0, k_j < k_{j+1}$, ja $k_n \le +\infty$.

Osoita että optio $F(\omega) := f(S_1(\omega))$ on toistettavissa salkulla joka kostuu S_t, B_t instrumentteista ja äärellisesti monesta eurooppalaisista osto- ja myynti- optioista, ja laske sen hinnan instrumenttien hintojen funktiona.

3. Käsitellään Cox-Ross-Rubinsteinin binomimalli $(B_t, S_t(\omega) : t \in 1, 2, \dots, T)$ todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jossa $B_t = (1 + r)^t$ on riskiton instrumentti, deterministisella korolla $r > -1$, ja

$$S_t(\omega) = S_0 \prod_{s=1}^{t} (1 + R_s(\omega))$$

on osakeen hinta, jossa $(R_s(\omega) : s = 1, \dots, T)$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujat joilla

$$P(R_s = u) = 1 - P(R_s = d) = p, \quad s = 1, \dots, T$$

jossa $0 < p < 1$ aidolla epäyhtälöllä.

(a) Millä d, r, u arvoilla malli on arbitraasi-vapaa ?

(b) Kun malli on arbitraasi-vapaa, onko malli myös täydellinen ?

(c) Kun malli on arbitraasi-vapaa, esitä riskineutraalimitta Q numeräärin B_t:n suhteen, parametrien (d, r, u) riippuen.

(d) Olkoon $F(\omega) = f(R_1(\omega), \dots, R_T(\omega))$ optio. Diskontattu option arvo numeräärillä on

$$\widetilde{F}(\omega) = \frac{F}{(1+r)^T} = \frac{f(R_1(\omega), \dots, R_T(\omega))}{(1+r)^T}$$

Selitä miten martingaali esitys-kaava

$$\widetilde{F}(\omega) = E_Q(\widetilde{F}) + \sum_{s=1}^{T} E_Q\left(\nabla_s \widetilde{F} \middle| \mathcal{F}_{s-1} \right) \Delta M_s$$

liittyy optioiden hinnoitteluun ja suojaukseen

Tässä $\mathcal{F}_s = \sigma(R_1, \ldots, R_s)$

$$\nabla_s \widetilde{F}(R_1, \ldots, R_T) = \frac{f(R_1, \ldots, R_{s-1}, u, R_{s+1}, \ldots, R_T) - f(R_1, \ldots, R_{s-1}, d, R_{s+1}, \ldots, R_T)}{(1+r)^T}$$

jossa

$$\Delta M_s = \big(\mathbf{1}(R_s = u) - Q(R_s = u)\big)$$

4. Black-Scholes aika-jatkuvasta markkinamallista:

   Olkoon osakehintaprosessi $(S_t : t \in [0,T]) \subset \mathbb{R}_+$

   ja pankkitilinarvoprosessi $(B_t : t \in [0,T]) \subset \mathbb{R}_+$, SDY:n

$$S_t = s_0 + \int_0^t S_u \, \mu \, du + \int_0^t S_u \, \sigma \, dW_u \ , \quad s_0 > 0 \ ,$$

   ja differentiaaliyhtälön

$$B_t = 1 + \int_0^t B_u r \, du$$

   ratkaisut, jossa $(W_t : t \in [0,T]) \subset \mathbb{R}$ on Brownin liike prosessi.

   (a) Kirjoita stokastinen differentiaali yhtälö diskontatulle osakehinta-prosessille
   $\widetilde{S}_t = S_t/B_t$, ja laske sen ratkaisu.

   (b) Näytä että tämä Black-Scholes markkinamalli on on arbitraasi-vapaa: on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta $Q \sim P$ jolla $(\widetilde{S}_t)$ on $(Q, \mathbb{F})$-martingaali.

   (c) Laske uskottavuusosamääräprosessi $Z_t = dQ_t/dP_t$.

   (d) Laske arbitraasivapaahinta ja suojaus-strategia optiolle

$$F(\omega) = (S_T(\omega))^2 \ .$$