OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
VÄLIKOE 2
2.5.2012

1. Tutki derivoimalla, ovatko seuraavat funktiot harmonisia jossain tason osajoukossa ($\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$):

a) $(x_1 - x_2)^2$, b) $x_2^2 - x_1^2 + 3x_1x_2$, c) $\log\left(|\bar{x} - (1,1)|^3\right)$, d) $e^{-|\bar{x}|^2}$?

BONUSKYSYMYS (max. 1 ylimääräinen piste): Osaatko selittää harmonisten funktioiden yleisten ominaisuuksien perusteella, miksi kohdan d) funktio ei voi olla harmoninen tason yksikkökiekossa?

2. Olkoon Ω rajoitettu tasoalue, jolla on C^2-reuna, ja olkoon $u : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ funktio, joka on harmoninen joukossa Ω sekä kerran jatkuvasti derivoituva Ω:n sulkeumassa. Käyttäen sopivaa Greenin kaavaa, todista kaava

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = 0,$$

missä ν on reunan ulkonormaali ja integraali on polkuintegraali kaarenpituuden suhteen.

3. Olkoon Ω kuten tehtävässä 2. Formuloi sitä koskeva Laplace-Dirichlet-probleema (=LD). Esitä Ω:aa vastaavan kaksikerrospotentiaalin u lauseke, joka sisältää reunalla määritellyn tiheysfunktion ψ. Esitä integraaliyhtälö, jonka ψ tulee toteuttaa, että u olisi ongelman (LD) ratkaisu. Esitä kaksikerrospotentiaalin hyppyrelaatiot eli jatkuvuus/epäjatkuvuusominaisuudet alueen Ω reunalla. (Kaikki edellä mainittu ilman todistuksia.)

4. Olkoon Ω kuten tehtävässä 2, ja oletetaan, että on annettu jatkuva funktio $f : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ ja kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva funktio $g : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$. Kuinka ratkaistaan ongelma

$$\Delta u(\bar{x}) = g(\bar{x}) \ , \ \bar{x} \in \Omega,$$

$$u(\bar{x}) = f(\bar{x}) \ , \ \bar{x} \in \partial\Omega,$$

kun edellisen tehtävän ongelman (LD) ratkaisu tunnetaan? (Todistushahmotelma riittää.)

****

1. Using just differentiation, decide if the following functions are harmonic in some subdomain of the plane ($\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$):

a) $(x_1 - x_2)^2$, b) $x_2^2 - x_1^2 + 3x_1x_2$, c) $\log\left(|\bar{x} - (1,1)|^3\right)$, d) $e^{-|\bar{x}|^2}$?

BONUS PROBLEM (max. 1 extra point): Can you explain using general properties of harmonic functions, why the function d) cannot be harmonic in the unit disc of the plane?

2. Let Ω be a bounded planar domain with C^2 boundary, and let $u : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ a function which is harmonic in Ω and once continuously differentiable in the closure of Ω. Using a relevant Green formula, prove the identity

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = 0,$$

where ν is the outward unit normal of the boundary and the integral is a path integral with respect to the arc length.

3. Let Ω be as in the problem 2. Write the Laplace-Dirichlet-problem (=LD) in Ω. Write the expression of the corresponding double layer potential u, containing the density function ψ defined on the boundary. Write the integral equation which ψ has to satisfy so that u becomes the solution of (LD). Write the discontinuity (or jump) relations for the double layer potential on the boundary of Ω. (All of this without proofs.)

4. Let Ω be as in the problem 2, and assume that we are given the continuous function $f : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ and the two times continuously differentiable function $g : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$. How can one solve the problem

$$\Delta u(\bar{x}) = g(\bar{x}) \ , \ \bar{x} \in \Omega,$$

$$u(\bar{x}) = f(\bar{x}) \ , \ \bar{x} \in \partial\Omega,$$

if the solution of (LD) in the previous problem is known? (A skecth of proof is enough.)