OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
VÄLIKOE 1
2.3.2012

1. Ratkaise seuraava ODY:n alkuarvotehtävä tuntemattomalle funktiolle $u = u(x,y)$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$:

$$4u_x + 3u_y = xy \quad , \quad u(x,x) = e^{-x^2}.$$

2. Formuloi aaltoyhtälön Cauchyn probleema $\mathbf{R}$:ssä tuntemattomalle funktiolle $u = u(x,t)$. Esitä sen yleinen ratkaisukaava (d'Alembert). Esitä ratkaisu siinä tapauksessa, että alkuehdot ovat $u(x,0) = (1+x^2)^{-1}$ ja $u_t(x,0) = \sin(2\pi x)$.

3. Oletetaan, että $u = u(x,t) \in C^2([0,5])$ ratkaisee aaltoyhtälön

$$u_{tt} = u_{xx} \tag{A}$$

välillä $]0,5[\ni x$, ja lisäksi u toteuttaa reunaehdot

$$u(0,t) = u(5,t) = 0 \tag{B}$$

kaikilla $t \geq 0$.
a) Kirjoita u:n energiaintegraalin (eli energiafunktionaalin) $E(t)$ lauseke.
b) Osoita, että $E(t)$ on vakio t:n suhteen.
c) Kuinka energiaintegraalia voidaan käyttää osoittamaan, että probleeman (A), (B), (C) ratkaisu on yksikäsitteinen, kun (C) on alkuehto

$$u(x,0) = \phi_0(x), \quad u_t(x,0) = \phi_1(x), \quad x \in [0,5],$$

missä funktiot ϕ_j annettuja ja riittävän säännöllisiä?

4. Ovatko seuraavat kahden muuttujan funktiota $u = u(x,y)$ koskeva ODYt

$$(1) \quad u_{xx} + 4u_{xy} - 4u = 0 \quad , \quad (2) \quad u_{xx} - u_{xy} + u_{yy} - \sqrt{3}u_x = 0$$

elliptisiä, parabolisia vai hyperbolisia? Perustelu tarvitaan!

****

1. Solve the following initial value problem for the PDE concerning the unknown function $u = u(x,y)$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$:

$$4u_x + 3u_y = xy \quad , \quad u(x,x) = e^{-x^2}.$$

2. Formulate the Cauchy problem of the wave equation in $\mathbf{R}$ for the unknown function $u = u(x,t)$. Give the general solution formula (d'Alembert). Give the solution in the case of initial conditions $u(x,0) = (1+x^2)^{-1}$ ja $u_t(x,0) = \sin(2\pi x)$.

3. Assume that $u = u(x,t) \in C^2([0,5])$ is a solution of the wave equation

$$u_{tt} = u_{xx} \tag{A}$$

in the interval $]0,5[\ni x$, and that in addition u satisfies the boundary conditions

$$u(0,t) = u(5,t) = 0 \tag{B}$$

for all $t \geq 0$.
a) Write the formula for the energy integral (or energy functional) $E(t)$ of u.
b) Prove that $E(t)$ is constant with respect to t.
c) Explain how the energy integral can be used to prove the uniqueness of the problem (A), (B), (C), when (C) is the initial condition

$$u(x,0) = \phi_0(x), \quad u_t(x,0) = \phi_1(x), \quad x \in [0,5],$$

and the functions ϕ_j are given and regular enough.

4. Are the following PDE's concerning the function $u = u(x,y)$ of two variables

$$(1) \;\; u_{xx} + 4u_{xy} - 4u = 0 \;\; , \;\; (2) \;\; u_{xx} - u_{xy} + u_{yy} - \sqrt{3}u_x = 0$$

elliptic, parabolic or hyperbolic? Prove your opinion!