OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
KOE 21.3.2013

1. Ratkaise seuraava ODY:n alkuarvotehtävä tuntemattomalle funktiolle $u = u(x, y)$ ja tutki, millä muuttujien arvoilla ratkaisu on olemassa:

$$-4u_x + u_y = u, \quad u(x, 0) = x$$

2. Formuloi lämpöyhtälön alkuarvo–reuna-arvoprobleema kahden muuttujan funktiolle $u = u(x, t)$, missä x on suljetulla välillä $[0, L]$, ja reunafunktiot ovat 0. Esitä ratkaisukaava Fourier–sarjojen avulla (ilman todistuksia).

3. Ovatko seuraavat ODY:t lineaarisia, semi- tai kvasilineaarisia (ota kantaa kaikkiin vaihtoehtoihin; $u = u(x, y)$):

$$a)\ \ u_x + \sin x\ u_y = e^{x^2u^2}, \quad b)\ \ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(x+y),$$

$$c)\ \ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(x+y), \quad d)\ \ u_y + u_x u_{yy} = \sin(x+y)$$

4. Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu yhdesti yhtenäinen alue, jonka reuna on ainakin kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva käyrä. Kuvaile, kuinka sisäalueen Laplace-Dirichlét probleema

$$\Delta u(\bar{x}) = 0, \qquad \text{kun } \bar{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(\bar{x}) = f(\bar{x}), \qquad \text{kun } \bar{x} \in \partial\Omega, \tag{2}$$

voidaan ratkaista kerrospotentiaalimenetelmällä. (Esitä ratkaisussa käytettävät yritteet, integraaliyhtälöt jne. Todistuksia ei tarvitse esittää.)

5. Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ kuten tehtävässä 4. Jos tehtävän 4 ratkaisu tunnetaan, kuinka ratkaistaan Poisson'n yhtälöön liittyvä ongelma

$$\Delta u(\bar{x}) + e^{-|\bar{x}|^2} = 0, \qquad \text{kun } \bar{x} \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(\bar{x}) = \sin(|\bar{x}|^2 + 1), \qquad \text{kun } \bar{x} \in \partial\Omega. \tag{4}$$