OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LOPPUKOE
18.5.2010

1. Ratkaise seuraava 1. kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälön alkuarvotehtävä, ja tutki, millä muuttujien arvoilla ratkaisu on olemassa (tässä $u = u(x, y)$):

$$2u_x - u_y = -u \ , \quad u(x, 0) = x.$$

2. Ovatko seuraavat funktiot harmonisia tasossa tai sen jossakin osa–alueessa ($(x, y) \in \mathbf{R}^2$):

a) $x/(x^2 - y^2)$,

b) $\int_{-1}^{1} (x^2 - y^2 + t)dt$?

c) $\log((x^2 + y^2)^3)$,

d) $\log(x^2 - y^2)$,

3. Ovatko seuraavat ODY:t lineaarisia, semi– tai kvasilineaarisia (ota kantaa kaikkiin vaihtoehtoihin; $u = u(x, y)$):

$$a) \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(x + y), \quad b) \ u + 2u_y + 3u_x u_{yy} + x^2 + y^3 = 0$$

$$c) \ u_x + \sin y \ u_y = e^{y^2 u^2}, \quad d) \ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(x + y),$$

4. Olkoon Ω rajoitettu, yhdesti yhtenäinen tasoalue, jonka reuna on 2 kertaa jatkuvasti derivoituva polku. Formuloi Laplace-Dirichlét probleema alueessa Ω. Kuvaile, kuinka tämä voidaan ratkaista kerrospotentiaalimenetelmällä. Todistuksia ei tarvitse esittää.

5. Olkoon $u = u(x, t)$, missä $x \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$. Ratkaise seuraava aaltoyhtälön Cauchyn probleema:

$$u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad x \in \mathbf{R} \ , t > 0,$$

$$u(x, 0) = \sin x \quad , \quad x \in \mathbf{R},$$

$$u_t(x, 0) = \cos x \quad , \quad x \in \mathbf{R},$$