Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Yleistentti, 11.08.2011

1. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$u_t + cu_x + u^3 = 0, \quad u(x,0) = x,$$

missä c on positiivinen vakio.

2. (Laskareista) Todista, että jokainen origokeskisessä a-säteisessä kiekossa harmoninen, ei-negatiivinen funktio u toteuttaa ns. Harnackin-epäyhtälön

$$\frac{a-r}{a+r}u(0,0) \le u(x,y) \le \frac{a+r}{a-r}u(0,0),\ 0 < r = \sqrt{x^2+y^2} < a.$$

3. Muotoile ja todista Maksimiperiaatteen heikko muoto tasoalueen harmonisille funktioille.

4. (Laskareista) Olkoon $H = \{(x_1,x_2);\ x_2 > 0\}$ avoin ylempi puolitaso. Oletetaan, että $u \in C^2(H) \cap C(\overline{H})$ on H:ssa harmoninen ja rajoitettu. Osoita, että

$$\sup_H u = \sup_{\partial H} u.$$

Onko väite totta, jos emme oleta että u on rajoitettu? **Vihje:** Tutki aluksi harmonista funktiota

$$u(x_1,x_2) - \varepsilon \ln\sqrt{x_1^2 + (x_2+1)^2},$$

sopivassa rajoitetussa alueessa.

5. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$u_{tt} - c^2\Delta_x u = t + x,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 2x_1^2,\ x \in \mathbb{R}^3.$$