

Helsingin yliopisto/Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATEMATIIKAN MENETELMÄKURSSI I
 Kurssikoe, 2012-10-16
VASTAA NELJÄÄN TEHTÄVÄÄN!

1. Selosta seuraavien asioiden merkitystä numeerisessa laskennassa (vastaukseksi riittää pari riviä per kohta):

- (a) pyöristyvirheiden kasautuminen laskennan aikana,
- (b) merkitsevien numeroiden tarkkuutta haittaava kumoutuminen,
- (c) kuntoisuusluvun vaikutus merkitsevien numeroiden lukumäärään lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisussa.

Selosta MATLABin käyttöä muutaman rivin koodilla kunkin seuraavan ongelman tapauksessa:

- (d) funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ välillä $[0, 1]$ olevan nollakohdan haku,
- (e) polynomin juurien muodostaminen, kun kertoimet tunnetaan ja toisaalta polynomin kertoimien muodostaminen, kun juuret tunnetaan,
- (f) lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu.

2. Tarkastellaan datapisteitä $(x_i, y_i), i = 1, \dots, m$ ja merkitään

$$f(k, b) = \sum_{i=1}^m (kx_i + b - y_i)^2.$$

- (a) Muodosta lausekkeet $\frac{\partial f}{\partial k}$ ja $\frac{\partial f}{\partial b}$.
- (b) Muodosta (a)-kohdan avulla yhtälöryhmä

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 0; \frac{\partial f}{\partial b} = 0$$

ja ratkaise se k :n ja b :n suhteen.

(c) Osoita, että (b)-kohdan mukainen suoran $y = kx + b$ kulkee pisteen (\bar{x}, \bar{y}) kautta, missä $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i, \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$.

3. Yksikköneliössä sijaitsee p kpl satunnaisesti valittuja pisteitä. Muodosta MATLAB-ohjelmalla ko. pisteet, niiden välimatkataulukko ja tulosta se formaatissa

	1	2	3	4	5
1	0.00				
2	0.76	0.00			
3	0.60	0.43	0.00		
4	0.92	0.20	0.46	0.00	
5	0.78	0.18	0.31	0.16	0.00

piirrä pisteet tasoon.

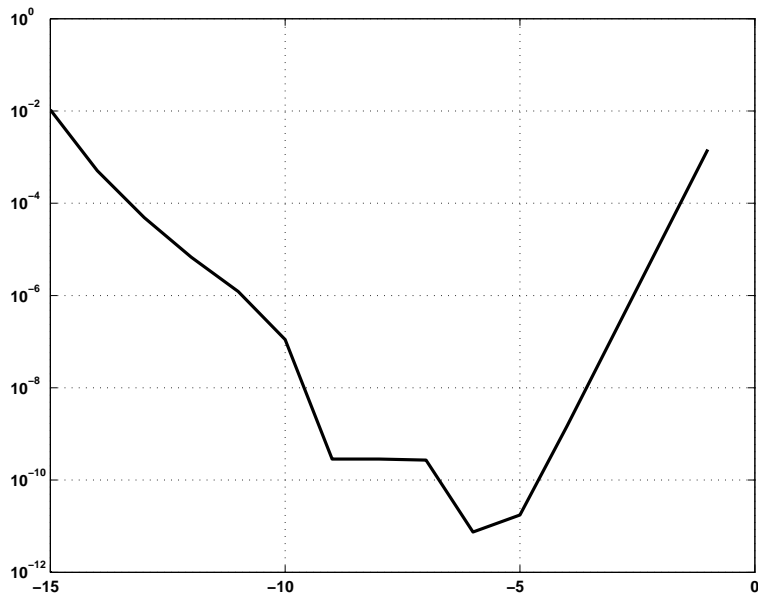
4. Puolen vuoden välein suoritetuissa muistitesteissä muistetun taso kehittyi seuraavasti: 12 11 10 8 7 5. Sovita tähän aineistoon muotoa $y = \lambda_1 \exp(-\lambda_2 x)$ oleva malli, ja ennusta tulos mittauksessa 12. Tee tarkoitukseen sopiva MATLAB-ohjelma. Numeerisia tuloksia ei vaadita.

5. (a) Funktion $f(x) = \sin(x)$ numeerista derivointia tutkitaan lausekkeen $(f(x+h) - f(x-h))/(2h)$ avulla. Selosta mitä ongelmia voi esiintyä ja miten ne voidaan välttää.

(b) Asian kokeellista selvitystä varten tehtiin seuraava MATLAB-ohjelma.

```
% FILE t4.m begins.
myf=inline('cos(s) -(sin(s+h)-sin(s-h))./(2*h)', 's', 'h')
s= 0.5;  x=[];  z= [];
for j=1:15
    x=[x -j]; h= 10^(-j);
    z=[z myf(s,h)];
end
semilogy(x, abs(z)+ 1e-16, 'LineWidth', 2)
% FILE t4.m ends.
```

Tuloksista saatiin seuraava kuva.



Mitä suosituksia kuvan perusteella voidaan antaa h :n valinnalle?

Helsingin yliopisto/Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATEMATIIKAN MENETELMÄKURSSI I
 Exam, 2012-10-16 ANSWER FIVE PROBLEMS!

1. Explain the role of the following issues of numerical computing (it is enough to write a couple of lines for each item):

- (a) the accumulation of the roundoff errors during numerical computing
- (b) the loss of accuracy caused by cancellation of significant digits.
- (c) the influence of the condition number on the accuracy of the solution of a linear system

Write MATLAB scripts to illustrate the solution of the following problems:

- (d) finding the zero of a function $f : [0, 1] \rightarrow R$ on the interval $[0, 1]$,
- (e) finding the roots of a polynomial when coefficients are know and on the other hand forming the polynomial coefficients when the roots are known
- (f) solution of a linear system of equations.

2. Consider data point $(x_i, y_i), i = 1, \dots, m$. and write

$$f(k, b) = \sum_{i=1}^m (kx_i + b - y_i)^2 .$$

- (a) Compute the partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial k}$ and $\frac{\partial f}{\partial b}$.
- (b) Using part (a) form the system of equations

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 0; \frac{\partial f}{\partial b} = 0$$

and solve it for k and b .

(c) Show that the line $y = kx + b$ of part (b) goes through the point (\bar{x}, \bar{y}) where $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i, \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$.

3. Within the unit square $[0, 1] \times [0, 1]$ there are p random points. Write a MATLAB script to generate the points, to compute their mutual distance and to output this table in the following format.

	1	2	3	4	5
1	0.00				
2	0.76	0.00			
3	0.60	0.43	0.00		
4	0.92	0.20	0.46	0.00	
5	0.78	0.18	0.31	0.16	0.00

Plot these points in the plane.

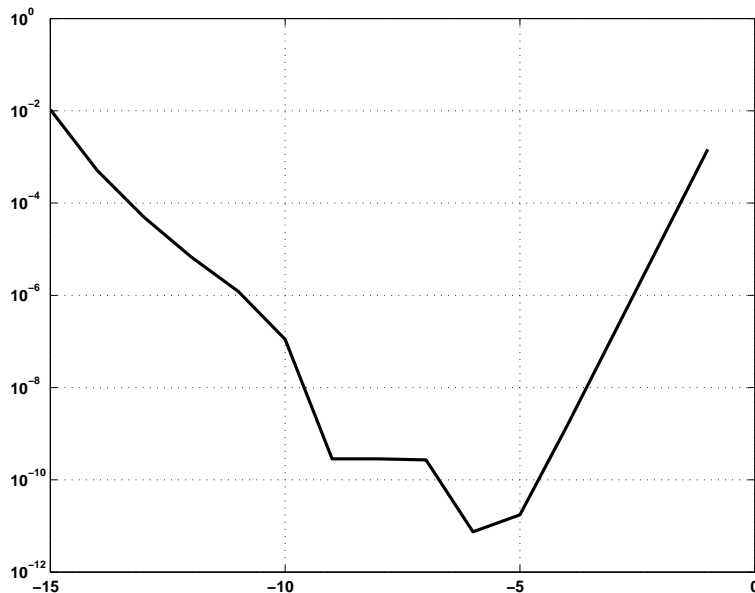
4. In a memory test the performance of the test person was measured within half a year intervals and the results in the first six measurement were : 12 11 10 8 7 5. Fit the model $y = \lambda_1 \exp(-\lambda_2 x)$ to this data and predict the result in the measurement 12 Write a MATLAB script for the purpose. Numerical results are not required.

5. (a) For the numerical differentiation of the function $f(x) = \sin(x)$ we study the difference quotient $(f(x+h) - f(x-h))/(2h)$. Explain the possible problems and how they can be avoided.

(b) For experimental study of this problem the following MATLAB script was written.

```
% FILE t4.m begins.
myf=inline('cos(s) -(sin(s+h)-sin(s-h))./(2*h)','s','h')
s= 0.5;  x=[];  z= [];
for j=1:15
    x=[x -j]; h= 10^(-j);
    z=[z myf(s,h)];
end
semilogy(x, abs(z)+ 1e-16,'LineWidth',2)
% FILE t4.m ends.
```

The program produced the following picture.



On the basis of this picture, how would you choose the parameter h , to minimize the error?