

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin kurssi
Loppukoe 21.3.2012

1. Osoita funktio $f : [0, \infty[\rightarrow]2, 3]$,

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x+1},$$

bijektioksi ja määritä f :n käänteisfunktio.

2. Millä x :n arvoilla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3x}{2x-1}\right)^k$$

suppenee? Laske sen summa.

3. Laske raja-arvot

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + 7x - 8}{x^2 - 1}\right)$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}\right)$.

4. Todista väliarvolauseen avulla epäyhtälö

$$\tan x - \tan y > x - y,$$

kun

$$-\frac{\pi}{2} < y < x < \frac{\pi}{2}.$$

5. Olkoon

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 2x + 1}.$$

Määritä f :n lokaalit ääriarvot ja kuvajoukko $f(\mathbb{R})$.