Lineaaristen mallien kurssi - yleistentti 14.12.2012

1. Määrittele yleinen (täysiasteinen) lineaarinen malli kaikkine oletuksineen ja siihen liittyvät käsitteet (pienimmän neliösumman) sovite ja residuaali. Selvitä muutamalla virkkeellä mallin sekä sovitteen ja residuaalin tulkinta. Osoita lisäksi oikeaksi yhtälö $\mathbf{y}'\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, jossa $\hat{\mathbf{y}}$ on aineistosta laskettu sovitevektori ja $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\hat{\varepsilon}_1 \;\cdots\; \hat{\varepsilon}_n]'$ on aineistosta laskettu residuaalivektori.

2. Olkoon $Y_1, ..., Y_5$ riippumattomia normaalisti jakautuneita satunnaismuuttujia, joille pätee $Y_i \sim \mathsf{N}(\mu_i, \sigma^2)$ ja

$$\mu_i = \begin{cases} \beta_1, & \text{kun } i = 1,2 \\ \beta_1 + 2\beta_2, & \text{kun } i = 3 \\ \beta_1 - \beta_2, & \text{kun } i = 4,5. \end{cases}$$

Muotoile tilanne lineaarisena mallina ja estimoi parametrit β_1 ja β_2 soveltamalla lineaarisen mallin estimointiteoriaa. Kuvaa lyhyesti käyttämäsi estimointiperiaate ja selvitä parametrivektorin $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \;\; \beta_2]'$ estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\beta}_1 \;\; \hat{\beta}_2]'$ jakauma.

3. Olkoon $Y_1, ..., Y_4$ riippumattomia normaalisti jakautuneita satunnaismuuttujia, joille pätee $Y_i \sim \mathsf{N}(i\beta, \sigma^2)$ $(i = 1, ..., 4)$. Muotoile tilanne lineaarisena mallina ja johda testi hypoteesille $H : \beta = 0$ vaihtoehtoa $\beta \neq 0$ vastaan.

4. Oletetaan, että satunnaismuuttujat $Y_{11}, ..., Y_{1n_1}, Y_{21}, ..., Y_{2n_2}, Y_{31}, ..., Y_{3n_3}$ ovat riippumattomia ja $Y_{ji} \sim \mathsf{N}\left(\mu_j, \sigma^2\right)$, $i = 1, ..., n_j$, $j = 1, 2, 3$. Muotoile tilanne lineaarisena mallina ja testaa hypoteesia $H : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ soveltamalla lineaarisen mallin testiteoriaa.

Muistin tueksi

- Satunnaisvektorin $\mathbf{X} \sim \mathsf{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ tiheysfunktio on

$$f(x) = (2\pi)^{-k/2} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\},$$

  jossa $\det(\boldsymbol{\Sigma})$ on kovarianssimatriisin $\boldsymbol{\Sigma}$ determinantti ja yksiulotteinen tapaus saadaan asettamalle $k = 1$.
- $F_{k,m}$-jakauman määrittelee satunnaismuuttuja $m\chi_k^2/k\chi_m^2$, jossa $\chi_k^2 \perp\!\!\!\perp \chi_m^2$.
  Lisäksi $\mathsf{E}(\chi_k^2) = k$, $\mathsf{Var}\left(\chi_k^2\right) = 2k$.
- t_k-jakauman määrittelee satunnaismuuttuja $Z/\sqrt{\frac{1}{k}\chi_k^2}$, josssa $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$ ja $Z \perp\!\!\!\perp \chi_k^2$.
- Jos $\mathbf{X} \sim \mathsf{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, niin $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_k^2$.
- Jos $\mathbf{X} \sim \mathsf{N}_k\left(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I}_k\right)$ ja matriisi $\mathbf{P}$ $(k \times k)$ astetta r oleva ortogonaalinen projektio, niin $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{P} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) / \sigma^2 \sim \chi_r^2$.