Lineaaristen mallien kurssi - yleistentti 15.11.2012

1. Yleisen lineaarisen mallin lähtökohdaksi voidaan ottaa malliyhtälö, jonka matriisiesitys on $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$. Mallin oletukset eivät kuitenkaan selviä tästä. Esitä kaikki mallista tehtävät oletukset ja selvitä muutamalla virkkeellä mallin tulkinta. Selvitä lisäksi mitä tarkoitetaan käsitteillä (pienimmän neliösumman) residuaali ja sovite. Laske lisäksi $\mathsf{Cov}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{\mathbf{Y}})$, kun $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ on aineistosta laskettua residuaalivektoria vastaava satunnaisvektori ja $\hat{\mathbf{Y}}$ on aineistosta laskettua sovitevektoria vastaava satunnaisvektori.

2. Oletetaan, että tehtävässä 1

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad (n \times 3)$$

jolloin siis $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. (i) Johda parametrin β_3 suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\beta}_3$. (ii) Selvitä $\hat{\beta}_3$:n jakauma. Onko $\hat{\beta}_3$ riippumaton parametrin (β_1, β_2) suurimman uskottavuuden estimaattorista $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$?

3. Oletetaan, että n riippumatonta havaintoa $Y_1, ..., Y_n$ $(n > 2)$ on poimittu normaalijakaumasta, jonka varianssi on tuntematon σ^2. Ensimmäisen $n-1$ havainnon tiedetään olevan peräisin samasta normaalijakaumasta, mutta ennen viimeisen havainnon poimimista epäillään, että havaintojen odotusarvo on muuttunut äkillisesti ja saattaa poiketa ensimmäisen $n-1$ havainnon odotusarvosta. Muotoile tilanne lineaarisen mallin avulla ja johda testi hypoteesille, jonka mukaan n. havainto on peräisin samasta normaalijakaumasta kuin $n-1$ ensimmäistä havaintoa.

4. Yksisuuntainen varianssianalyysi: Ongelmanasettelu, tilastollinen malli, tavallisimmin testattava hypoteesi ja sen testaaminen.

Muistin tueksi

- Satunnaisvektorin $\mathbf{X} \sim \mathsf{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ tiheysfunktio on

  $$f(x) = (2\pi)^{-k/2} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\},$$

  jossa $\det(\boldsymbol{\Sigma})$ on kovarianssimatriisin $\boldsymbol{\Sigma}$ determinantti ja yksiulotteinen tapaus saadaan asettamalle $k = 1$.

- $F_{k,m}$-jakauman määrittelee satunnaismuuttuja $m\chi^2_k / k\chi^2_m$, jossa $\chi^2_k \perp\!\!\!\perp \chi^2_m$.
  Lisäksi $\mathsf{E}(\chi^2_k) = k$, $\mathsf{Var}\left(\chi^2_k\right) = 2k$.

- t_k-jakauman määrittelee satunnaismuuttuja $Z / \sqrt{\frac{1}{k}\chi^2_k}$, josssa $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$ ja $Z \perp\!\!\!\perp \chi^2_k$.

- Jos $\mathbf{X} \sim \mathsf{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, niin $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_k$.

- Jos $\mathbf{X} \sim \mathsf{N}_k\left(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_k\right)$ ja matriisi $\mathbf{P}$ $(k \times k)$ astetta r oleva ortogonaalinen projektio, niin $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{P} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) / \sigma^2 \sim \chi^2_r$.