Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 21.12.2016

Koeaika on 2,5 tuntia. Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

1. Selvitä seuraavissa tapauksissa, onko olemassa lineaarikuvausta L, joka toteuttaa annetut ehdot. Jos kuvaus on olemassa, anna kuvauksen määrittelevä kaava.
   (a) Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ja $L(0,1,-1) = (-1,-1)$, $L(-2,2,0) = (-3,2)$ sekä $L(-2,0,2) = (0,1)$.
   (b) Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja L venyttää vektorin $(-1,1)$ nelinkertaiseksi sekä kiertää vektoria $(1,0)$ myötäpäivään 90 astetta.

2. (a) Onko joukko $W = \{a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2 \mid abc = 0\}$ avaruuden $\mathcal{P}_2$ aliavaruus?
   (b) Ohessa on osoitettu, että
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$
   on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus. Todistuksen loogisessa rakenteessa on kuitenkin puutteita, eikä se ole hyvällä matemaattisella tyylillä kirjoitettu. Kirjoita todistus uudelleen korjaten puutteet. Käytä ratkaisussasi kokonaisia suomen kielen virkkeitä.
   Todistus:
$$\begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & d \\ -d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+2c & b+d \\ -b+(-d) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a+c) & b+d \\ -(b+d) & 0 \end{bmatrix}$$
$$r\begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(2a) & rb \\ r(-b) & r\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(ra) & rb \\ -(rb) & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2\cdot 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Tässä tehtävässä tutkitaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}((-1,2,-1),(1,1,1))$ sekä vektoria $\bar{v} = (2,-5,1)$. Sisätulona on tavallinen pistetulo.
   (a) Määritä $\operatorname{proj}_W(\bar{v})$. (Muistin virkistys: $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$.)
   (b) Kaverisi on opiskellut lineaarialgebraa, mutta ei ole kuullut kohtisuorasta komplementista. Selitä hänelle sanallisesti, mitä kohtisuora komplementti tarkoittaa. Voit halutessasi piirtää myös havainnekuvia.
   (c) Kirjoita vektori $\bar{v}$ summana kahdesta vektorista, joista toinen on aliavaruuden W ja toinen kohtisuoran komplementin $W^\perp$ alkio.

4. (a) Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}((-7,5))$ suhteen. Etsi matriisia määrittämättä lineaarikuvauksen L ominaisarvot. Selitä, miksi löytämäsi luvut ovat kuvauksen ominaisarvoja. Perusteluiden ei tarvitse olla tarkat, vaan voit nojautua niissä esimerkiksi piirrokseen.
   (b) Olkoon V vektoriavaruus, jolla on kanta $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$. Oletetaan, että $L\colon V \to W$ on lineaarikuvaus. Osoita, että jos $(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n))$ on kanta, niin L on isomorfismi.

Muista, että saat 4 koepistettä HowULearn-kyselyyn vastaamisesta. Kyselyn linkki on lähetetty sinulle sähköpostitse, ja pääset kirjautumaan kyselyyn myös osoitteessa learn.helsinki.fi. Vastaa kyselyyn viimeistään 23.12.