Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuulustelu 15.6.2015

Koeaika on 3,5 tuntia.

1. (a) Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Mitkä seuraavista sievennyksistä saa tehdä? Muista perustella vastauksesi. Jos sievennys on tehty väärin, voit perustella sen esimerkkivektoreiden avulla.

$$\text{(a)}\quad \frac{\bar{v}\cdot\cancel{\bar{w}}}{\bar{w}\cdot\cancel{\bar{w}}} = \frac{\bar{v}}{\bar{w}} \qquad \text{(b)}\quad \frac{\bar{v}\cdot\cancel{\bar{w}}}{\cancel{\bar{w}}\cdot\cancel{\bar{w}}}\cancel{\bar{w}} = \bar{v} \qquad \text{(c)}\quad \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\cancel{\bar{w}\cdot\bar{w}}}(\cancel{\bar{w}\cdot\bar{w}}) = \bar{v}\cdot\bar{w}$$

   (b) Oletetaan, että vektoreille $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ pätee $\|\bar{v}\| = 3$, $\|\bar{w}\| = 4$ ja $\bar{v}\cdot\bar{w} = -3$. Määritä $\|2\bar{v} - \bar{w}\|$.

2. (a) Kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on, jos yhtälöryhmän matriisi saadaan alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]?$$

   (b) Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Tiedetään, että matriisiyhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on ratkaisu $\bar{x} = (2, 2, -1)$. Onko matriisi A kääntyvä?

3. (a) Kerro omin sanoin, miltä vektorien virittämät aliavaruudet voivat näyttää.

   (b) Keksi kaksi eri vektoria $\bar{p} \in \mathbb{R}^2$, joilla suora $\{\bar{p} + t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ on vektorin virittämä aliavaruus. Perustele vastauksesi.

4. (a) Osoita ominaisvektorin määritelmän avulla, että $(0, -2)$ on matriisin

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

   ominaisvektori.

   (b) Oletetaan, että A on matriisi, jolla on ominaisarvo λ. Olkoot $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ominaisarvoa λ vastaavia ominaisvektoreita. Osoita ominaisvektorin määritelmän avulla, että myös $5\bar{v} - 3\bar{w}$ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori.

5. Osoita seuraavissa kohdissa väite todeksi tai näytä vastaesimerkin avulla, että se ei pidä paikkaansa. Muista perustella vastauksesi huolellisesti.

   (a) Oletetaan, että avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on sidottu. Tällöin jotkin vektoreista $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ ovat toistensa skalaarimonikertoja.

   (b) Oletetaan, että $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Tällöin aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}, \bar{w})$ dimensio on kaksi.