

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuulustelu 7.4.2016

1. Tutkitaan vektoreita $\bar{v}_1 = (1, -3, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, -4, 0)$ ja $\bar{v}_3 = (1, 1, 1)$.
 - (a) Kirjoita joukon $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ määritelmä.
 - (b) Anna kolme esimerkkiä joukon $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vektoreista. Perustele vastauksesi.
 - (c) Mikä on avaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ dimensio? Perustele vastauksesi dimension määritelmän avulla.
2.
 - (a) Miten määritellään vapaa vektorijono?
 - (b) Merkitään $\bar{w}_1 = (-10, -17, -4, -13)$, $\bar{w}_2 = (1, 1, -1, 2)$ ja $\bar{w}_3 = (2, 3, 0, 3)$. Halutaan selvittää, onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa.
 - i. Millaista yhtälöä on tutkittava? Mitä yhtälön ratkaisuihin pitäisi osoittaa?
 - ii. Selitä huolellisesti, millainen yhtälöryhmä yhtälöstä saadaan.
 - iii. Kun yhtälöryhmän matriisia muokataan alkeisrivitoimituksilla, saadaan matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/7 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Mitä tämän perusteella voidaan päätellä jonon $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaudesta?

3. (a) Tiedetään, että matriisilla A on ominaisvektori $\bar{v} = (-4, 1)$. Mikä seuraavista vektoreista voisi olla $A\bar{v}$ ja mikä ei? Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.

$$\bar{a} = (2, -1/2), \quad \bar{b} = (1, 4), \quad \bar{c} = (1, 0)$$

- (b) Tiedetään, että matriisilla B on ominaisarvo 3, jota vastaavat ominaisvektorit $\bar{v}_1 = (-2, 4, 1, -1)$ ja $\bar{v}_2 = (0, 1, 0, 1)$. Etsi ominaisarvoa 3 vastaava ominaisvektori, joka ei ole yhdensuuntainen kummankaan vektoreista \bar{v}_1 ja \bar{v}_2 kanssa. Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.
4. (a) Erään yhtälöryhmän matriisi on saatu alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & b & 0 \\ 0 & -2 & a & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

missä a ja b ovat joitakin reaalinumeroita. Kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on?

- (b) Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Oletetaan lisäksi että yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on ratkaisu $\bar{x} = (1, 0, -1)$. Onko matriisi A kääntyvä?
5. Oletetaan, että $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos \bar{a} ja \bar{b} ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin $\|\bar{a} + \bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2$.