Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Yleistentti 29.10.2015

1. (a) Kirjoita joukon $\text{span}((1,0,-3),(1,-1,1))$ määritelmä.
   (b) Anna kolme joukon $\text{span}((1,0,-3),(1,-1,1))$ vektoria, jotka poikkeavat vektoreista $(1,0,-3)$ ja $(1,-1,1)$.
   (c) Listaa vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ erityyppiset aliavaruudet. (Voit vastata omin sanoin. Vastauksia ei tarvitse perustella.)

2. Selvitä seuraavissa tapauksissa, kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on. Perustele vastauksesi.

   (a) Yhtälöryhmää vastaava matriisi on saatu alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\text{i.}\ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -6 & 0 & 7/5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{ii.}\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

   (b) Yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti on 0 ja yhtälöryhmällä on ainakin yksi ratkaisu.

3. (a) Merkitään $\bar{v}_1 = (1,0,0)$, $\bar{v}_2 = (1,1,0)$ ja $\bar{v}_2 = (1,-1,-1)$.
      i. Tutki vapauden määritelmän avulla, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa.
      ii. Voidaan osoittaa, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Määritä vektori, jonka koordinaatit tämän kannan suhteen ovat -2, 0 ja -1.
   (b) Anna esimerkki avaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruudesta, jonka dimensio on kaksi. Perustele vastauksesi dimension määritelmällä.

4. (a) Tiedetään, että matriisilla A on ominaisvektori $\bar{v} = (-4,1)$. Mikä seuraavista vektoreista voisi olla $A\bar{v}$ ja mikä ei? Perustele vastauksesi.

$$\bar{a} = (2,\ -1/2), \qquad \bar{b} = (1,4), \qquad \bar{c} = (1,0)$$

   (b) Tiedetään, että matriisilla B on ominaisarvo -5, jota vastaavat ominaisvektorit $\bar{v}_1 = (-3,2,1,-2)$ ja $\bar{v}_2 = (1,1,1,1)$. Keksi ominaisarvoa -5 vastaava ominaisvektori, joka ei ole yhdensuuntainen kummankaan vektoreista $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ kanssa. Perustele vastauksesi ominaisvektorin määritelmän avulla.

5. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Vektorin $\bar{v}$ projektion vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle voi laskea kaavalla

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

   (a) Merkitään $\bar{v} = (-1,4)$, $\bar{w} = (0,2)$ ja $\bar{u} = (0,4)$. Määritä $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ ja $\text{proj}_{\bar{u}}(\bar{v})$.
   (b) Selitä omin sanoin, mistä johtuu, että a-kohdassa $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \text{proj}_{\bar{u}}(\bar{v})$. Voit havainnollistaa selitystäsi kuvan avulla.
   (c) Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Oletetaan lisäksi, että vektori $\bar{u}$ on yhdensuuntainen vektorin $\bar{w}$ kanssa. Osoita, että $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \text{proj}_{\bar{u}}(\bar{v})$.