Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuulustelu 17.6.2015

1. Kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on, jos

   (a) yhtälöryhmän matriisi saadaan alkeisrivitoimituksilla muotoon
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

   (b) yhtälöryhmän matriisi saadaan alkeisrivitoimituksilla muotoon
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   (c) yhtälöryhmän kerroinmatriisi on
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}?$$

2. Halutaan tutkia, onko jono $((2,1,0),(4,4,1/2),(5,-6,0)$ vapaa.

   (a) Millaista yhtälöä on tutkittava? Millainen yhtälöryhmä siitä saadaan?

   (b) Kun luennoitsija muokkasi yhtälöryhmän matriisia alkeisrivitoimituksilla, hän päätyi matriisiin
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right].$$
   Mitä tämän perusteella voidaan päätellä jonon vapaudesta?

3. (a) Tiedetään, että matriisilla A on ominaisvektori $\bar{v} = (-4,1)$. Mikä seuraavista vektoreista voisi olla $A\bar{v}$ ja mikä ei? Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.
$$\bar{a} = (2,\ -1/2), \qquad \bar{b} = (1,4), \qquad \bar{c} = (1,0)$$

   (b) Oletetaan, että matriisilla B on ominaisarvo λ, jota vastaa ominaisvektori $\bar{v}$. Osoita, että myös $-53\bar{v}$ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori.

4. (a) Piirrä kuva joukosta $W = \{(-3,4) + (1,2)t \mid t \in \mathbb{R}\}$. Onko W avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus?

   (b) Halutaan selvittää virittävätkö vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ avaruuden $\mathbb{R}^3$. Kun tutkitaan, onko vektori $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3$ vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio, päädytään matriisiin
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & a_3 - 2a_2 \\ 0 & -3 & 0 & 2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 - a_2 - a_3 \end{array}\right].$$
   Virittävätkö vektorit avaruuden $\mathbb{R}^3$?

5. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{u}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan lisäksi, että vektori $\bar{u}$ on yhdensuuntainen vektorin $\bar{w}$ kanssa.

   (a) Piirrä havainnekuva, jossa näkyvät vektorit $\bar{v}$, $\bar{u}$ ja $\bar{w}$ sekä projektiot $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ ja $\mathrm{proj}_{\bar{u}}(\bar{v})$.

   (b) Osoita, että $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \mathrm{proj}_{\bar{u}}(\bar{v})$.