Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesätentti 6.8.2015

1. (a) Päteekö $(1, 3, 1) \in \text{span}((0, 4, 0), (1, 1, 1))$?
   (b) Keksi kaksi eri vektoria $\bar{p} \in \mathbb{R}^2$, joilla suora $\{\bar{p} + (-3, 2)t \mid t \in \mathbb{R}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus. Perustele vastauksesi.

2. Neliömatriisin A sarakkeina ovat eräät vektorit $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \in \mathbb{R}^3$. Halutaan tutkia, onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa.
   (a) Millaista yhtälöä on tutkittava? Mitä yhtälön ratkaisuista pitäisi osoittaa?
   (b) Selitä huolellisesti, miten yhtälön tutkiminen johtaa matriisiin A.
   (c) Matriisin A tiedetään olevan kääntyvä. Onko vektorijono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa?

3. Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \text{span}((1, 1, 0), (2, 3, 1), (0, 1, 1))$. Sillä tiedetään olevan kanta $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1))$.
   (a) Kuvaile omin sanoin, miltä aliavaruus W näyttää. Onko kyseessä suora, taso vai jotakin muuta?
   (b) Tee seuraavista kohdista ne, jotka on mahdollista ratkaista. Jos ratkaiseminen ei ole mahdollista, kerro, mistä se johtuu.
      i. Määritä vektori $\bar{v}$, jonka koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat -3 ja 2.
      ii. Määritä vektori $\bar{v}$, jonka koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat -3, 2 ja 0.
      iii. Määritä vektori $\bar{v}$, jonka koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat -3, 2 ja 5.

4. Olkoon $A = \begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Mikä reaaliluvun c pitäisi olla, jotta matriisi A olisi kääntyvä?

5. Tiedetään, että matriisilla B on ominaisarvo -5, jota vastaavat ominaisvektorit $\bar{v}_1 = (-3, 2, 1, -2)$ ja $\bar{v}_2 = (1, 1, 1, 1)$. Keksi ominaisarvoa -5 vastaava ominaisvektori, joka ei ole yhdensuuntainen kummankaan vektoreista $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ kanssa. Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.

6. Oletetaan, että $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin $\|\bar{a} + \bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2$.