

**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I**  
**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Erilliskuulustelu**  
**12.5.2015**

1. Seuraavat matriisit on saatu eräistä yhtälöryhmistä alkeisrivitoimituksilla. Kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on kussakin tapauksessa?

$$\text{a) } \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \text{b) } \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 0 & 7/5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

2. (a) Anna esimerkki avaruuden  $\mathbb{R}^3$  aliavaruudesta, joka ei ole koko avaruus  $\mathbb{R}^3$  eikä nolla-avaruus  $\{\bar{0}\}$ .  
(b) Mikä on löytämäsi avaruuden dimensio? Perustele vastauksesi dimensioon määritelmän avulla.
3. Oletetaan, että  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ . Missä seuraavista merkinnöistä on järkeä? Perustele vastauksesi.

$$\text{a) } \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w} \quad \text{b) } \frac{\bar{v} \cdot \bar{w} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \quad \text{c) } \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w}}$$

4. Merkitään  $\bar{w} = (-2, 1)$  ja  $\bar{v} = (3, -4)$ .
- (a) Määritä laskemalla projektio  $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ . (Vinkki: Projektion kaava löytyy edellisestä tehtävästä.)  
(b) Piirrä kuva vektoreista  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$  ja  $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ . Selitä omin sanoin, miten erotusvektori  $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$  liittyy projektion määritelmään.
5. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia? Perustele vastauksesi.
- (a) Matriisilla voi olla äärettömän monta eri ominaisvektoria.  
(b) Matriisilla voi olla äärettömän monta eri ominaisarvoa.
6. (a) Miten määritellään vapaa vektori-jono?  
(b) Oletetaan, että  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^n$  ja  $\bar{v}_3 \in \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ . Voiko jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$  olla vapaa? Perustele vastauksesi vapauden määritelmän avulla.