Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuulustelu 25.2.2015

1. (a) Onko vektori $(-1, 1)$ kohtisuorassa vektoria $(-2, 4)$ vastaan?
   (b) Määritä kaikki avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektorit, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $(-2, 4)$ vastaan.
   (c) Edellisessä kohdassa määritetyt vektorit muodostavat itse asiassa aliavaruuden. Etsi tälle aliavaruudelle virittäjät. Piirrä aliavaruudesta kuva.

2. (a) Osoita ominaisvektorin määritelmän avulla, että $(0, -2)$ on matriisin
$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$
   ominaisvektori.
   (b) Oletetaan, että A on matriisi, jolla on ominaisarvo λ. Olkoot $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ominaisarvoa λ vastaavia ominaisvektoreita. Osoita ominaisvektorin määritelmän avulla, että myös $5\bar{v} - 3\bar{w}$ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori.

3. Osoita seuraavissa kohdissa väite todeksi tai näytä vastaesimerkin avulla, että se ei pidä paikkaansa. Muista perustella vastauksesi huolellisesti.
   (a) Oletetaan, että avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on sidottu. Tällöin jotkin vektoreista $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ ovat toistensa skalaarimonikertoja.
   (b) Oletetaan, että $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Tällöin aliavaruuden $\mathrm{span}(\bar{v}, \bar{w})$ dimensio on kaksi.

4. Selvitä seuraavissa tapauksissa, kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on.
   (a) Yhtälöryhmää vastaava matriisi on saatu alkeisrivitoimituksilla muotoon
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 0 & 7/5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
   (b) Yhtälöryhmän kerroinmatriisi on kääntyvä.
   (c) Yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti on 0 ja yhtälöryhmällä on ainakin yksi ratkaisu.

5. (a) Avaruudella $\mathbb{R}^3$ on kanta $((1, 2, 1), (0, 3, 1), (-2, -2, 0))$. Määritä vektori, jonka koordinaatit tämän kannan suhteen ovat -5, 0 ja -1.
   (b) Oletetaan, että $(\bar{v}, \bar{w})$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta. Osoita, että myös $(2\bar{v},\ \bar{v} + \bar{w})$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta.