

**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I**  
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Erilliskuulustelu 13.11.2014**

*Jos osallistuit kurssille syksyllä 2014 ja sinulle kertyi lisäpisteitä harjoitusten tekemisestä, kirjoita se selkeästi koepaperin alkuun.*

1. Tutkitaan vektoreita  $\bar{v}_1 = (1, -3, 1)$ ,  $\bar{v}_2 = (0, -4, 0)$  ja  $\bar{v}_3 = (1, 1, 1)$ .
  - (a) Kirjoita joukon  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$  määritelmä.
  - (b) Anna kolme esimerkkiä joukon  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$  alkioista. Perustele vastauksesi.
  - (c) Mikä on aliavaruuden  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$  dimensio? Perustele vastauksesi dimension määritelmän avulla.
  
2.
  - (a) Miten määritellään vapaa vektorijono?
  - (b) Merkitään  $\bar{w}_1 = (-10, -17, -4, -13)$ ,  $\bar{w}_2 = (1, 1, -1, 2)$  ja  $\bar{w}_3 = (2, 3, 0, 3)$ . Halutaan selvittää, onko jono  $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$  vapaa.
    - i. Millaista yhtälöä on tutkittava? Mitä yhtälön ratkaisuihin pitäisi osoittaa?
    - ii. Selitä huolellisesti, millainen yhtälöryhmä yhtälöstä saadaan.
    - iii. Kun yhtälöryhmän matriisia muokataan alkeisrivitoimituksilla, saadaan matriisi

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/7 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Mitä tämän perusteella voidaan päätellä jonon  $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$  vapaudesta?

3.
  - (a) Tiedetään, että matriisilla  $A$  on ominaisvektori  $\bar{v} = (-4, 1)$ . Mikä seuraavista vektoreista voisi olla  $A\bar{v}$ ? Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.
$$\bar{a} = (2, -1/2), \quad \bar{b} = (1, 4), \quad \bar{c} = (1, 0)$$
  - (b) Tiedetään, että matriisilla  $B$  on ominaisarvo 3, jota vastaavat ominaisvektorit  $\bar{v}_1 = (-2, 4, 1, -1)$  ja  $\bar{v}_2 = (0, 1, 0, 1)$ . Etsi ominaisarvoa 3 vastaava ominaisvektori, joka ei ole yhdensuuntainen kummankaan vektoreista  $\bar{v}_1$  ja  $\bar{v}_2$  kanssa. Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.
  
4.
  - (a) Erään yhtälöryhmän matriisi on saatu alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & b & 0 \\ 0 & -2 & a & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

missä  $a$  ja  $b$  ovat joitakin reaalilukuja. Kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on?

- (b) Oletetaan, että  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Oletetaan lisäksi että yhtälöllä  $A\bar{x} = \bar{0}$  on ratkaisu  $\bar{x} = (1, 0, -1)$ . Onko matriisi  $A$  kääntyvä?
  
5. Oletetaan, että  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ . Osoita, että jos  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin  $\|\bar{a} + \bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2$ .