

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuuilustelu 4.3.2014

1. (a) Onko $\bar{v} = (2, 6, -4)$ aliavaruuden $\text{span}((0, 1, -3), (1, 2, 1))$ alkio?
(b) Onko suora $\{(0, 2) + t(-1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ avaruuden \mathbb{R}^2 aliavaruus?

2. (a) Onko matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

kääntävä?

- (b) Oletetaan, että A ja B ovat 2×2 -matriiseja, joille pätee $\det(A) = 3$ ja $\det(B) = 1$. Määritä $\det(AB)$ ja $\det(4A)$.

3. (a) Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot.

- (b) Oletetaan, että A on neliömatriisi, jolla on ominaisarvo λ . Olkoon \bar{v} ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori. Osoita, että myös $10\bar{v}$ on λ :aa vastaava ominaisvektori.

4. (a) Halutaan tutkia, onko jono $((2, 1, 0), (4, 4, 1/2), (5, -6, 0))$ vapaa. Millaista yhtälöä on tutkittava? Millainen yhtälöryhmä siitä saadaan?

Kun luennoitsija muokkasi yhtälöryhmän matriisia alkeisrivitoimituksilla, hän päätyi matriisiin

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array} \right].$$

Mitä tämän perusteella voidaan päätellä jonon vapaudesta?

- (b) Virittävätkö vektorit $(1, -1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(0, 0, -1, 1)$ ja $(-1, 0, 1, 0)$ avaruuden \mathbb{R}^4 ?
5. (a) Määritä vektorin $(2, -3)$ projektio vektorin $(1, 1)$ virittämälle suoralle.
(b) Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\|\bar{v} + \bar{w}\| = \|\bar{v} - \bar{w}\|$, jos ja vain jos \bar{v} ja \bar{w} ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.