

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuulustelu
13.5.2013

1. (a) Merkitään $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Osoita, että B on matriisin A käänteismatriisi.
- (b) Oletetaan, että A ja B ovat 4×4 -matriiseja, joille pätee $\det(A) = -1$ ja $\det(B) = 2$. Määritä $\det(B^{-1}A)$ ja $\det(2A)$.
2. (a) Mikä seuraavista on $\text{proj}_{\bar{b}}(\bar{a})$ eli vektorin \bar{a} projektio vektorin \bar{b} virittämälle aliavaruudelle?

$$\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{b} \cdot \bar{b}} \bar{b}, \quad \frac{\bar{b} \cdot \bar{a}}{\bar{a} \cdot \bar{a}} \bar{a}, \quad \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{b} \cdot \bar{b}}$$

- (b) Määritä vektorin $\bar{a} = (-2, 1, 1, 0)$ projektio vektorin $\bar{b} = (1, 2, 0, 3)$ virittämälle aliavaruudelle.
- (c) Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että vektori $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ on kohtisuorassa vektoria \bar{w} vastaan.
3. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\bar{v}_2 = (1, 1, -1)$ ja $\bar{v}_3 = (1, 4, 2)$. Onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa? Perustele vastauksesi huolellisesti.
4. Seuraavat matriisit on saatu eräistä yhtälöryhmistä alkeisrivitoimituksilla. Kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on kussakin tapauksessa?

$$\text{a) } \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \text{b) } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & -4 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \text{missä } a, b \in \mathbb{R}.$$

5. Joukko $W = \{(a, 2a, -b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ on eräiden avaruuden \mathbb{R}^3 vektoreiden virittämä aliavaruus.
 - (a) Etsi virittäjät aliavaruudelle W .
 - (b) Määritä W :n dimensio.