

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuulustelu
5.3.2013

1. (a) Mikä seuraavista on $\text{proj}_{\bar{b}}(\bar{a})$ eli vektorin \bar{a} projektio vektorin \bar{b} virittämälle aliavaruudelle?

$$\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{b} \cdot \bar{b}}, \quad \frac{\bar{b} \cdot \bar{a}}{\bar{a} \cdot \bar{a}} \bar{a}, \quad \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{b} \cdot \bar{b}}$$

- (b) Määritä vektorin $\bar{a} = (-2, 1, 1, 0)$ projektio vektorin $\bar{b} = (1, 2, 0, 3)$ virittämälle aliavaruudelle.
(c) Olkoot $\bar{w}, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että \bar{w} on kohtisuorassa vektoreita \bar{v}_1 ja \bar{v}_2 vastaan. Osoita, että vektori \bar{w} on kohtisuorassa jokaista aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ vektoria vastaan.

2. (a) Merkitään $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -8 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Osoita, että B on matriisin A käänteismatriisi.

- (b) Merkitään $\bar{v}_1 = (2, 4, -3)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, 0)$ ja $\bar{v}_3 = (-1, 0, 2)$. Halutaan tutkia, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa. Millaista vektoryhtälöä on tutkittava? Millainen yhtälöryhmä siitä saadaan?

- (c) Päättelä ilman laskuja kohtien a) ja b) avulla, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa. Perustele vastauksesi.

3. Seuraavat matriisit on saatu eräistä yhtälöryhmistä alkeisrivitoimituksilla. Kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on kussakin tapauksessa?

$$\text{a) } \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \text{b) } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & -4 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \text{missä } a, b \in \mathbb{R}.$$

4. Vektoriavaruudella \mathbb{R}^3 on kanta $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$.

- (a) Mitkä ovat vektorin $(0, 0, 5)$ koordinaatit kannan \mathcal{B} suhteen?

- (b) Mikä luvun a on oltava, jotta vektorin $(0, a, 2)$ koordinaatit kannan \mathcal{B} suhteen olisivat 2, -5 ja 3?