

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 17.10.2012

Kokeessa saa käyttää laskinta mutta ei taulukkokirjaa.

1. (6 pistettä) Yhtälöryhmää vastaavasta matriisista on saatu alkeisrivitoimituksilla seuraava matriisi. Kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on? Määritä ratkaisut.

$$\text{a) } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{b) } \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

2. (12 pistettä) Merkitään $\bar{w}_1 = (1, 2, 0)$, $\bar{w}_2 = (1, 1, -1)$ ja $\bar{w}_3 = (1, 4, 2)$. Halutaan selvittää, onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa. Millaista yhtälöä pitää tutkia? Millainen yhtälöryhmä siitä saadaan?

Kun yhtälöryhmän matriisia muokataan alkeisrivitoimituksilla, saadaan matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Mitä tämän perusteella voidaan päätellä jonon $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaudesta? Perustele vastauksesi huolellisesti.

3. (10 pistettä) Oletetaan, että $k \in \mathbb{R}$. Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 \\ k^2 & 2 & 0 \\ 0 & k & k \end{bmatrix}$ determinantti.

Määritä ne luvun k arvot, joilla matriisi A on kääntyvä.

4. (10 pistettä) Merkitään $\bar{w} = (-2, 1, 1)$, $\bar{v}_1 = (1, 2, 0)$ ja $\bar{v}_2 = (0, 1, -1)$.
- a) Osoita, että vektori \bar{w} on kohtisuorassa vektoreita \bar{v}_1 ja \bar{v}_2 vastaan.
- b) Osoita, että vektori \bar{w} on kohtisuorassa jokaista aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ vektoria vastaan.

5. (10 pistettä)

- a) Miten määritellään kääntyvä matriisi?
- b) Oletetaan, että A , B ja C ovat kääntyviä $n \times n$ -matriiseja ($n \in \{1, 2, \dots\}$). Osoita, että myös matriisi ABC on kääntyvä. Mikä on sen käänteismatriisi?

Anna kurssipalautetta! Palautteesi on meille tärkeää, sillä haluamme kehittää opetusta. Saat WebOodin kautta sähköpostiisi linkin, josta pääset täyttämään palautteen. Palautteen antamisesta myönnetään lisäpisteitä saman verran kuin kolmesta tähdettömästä laskuharjoitustehtävästä.