Linjär algebra och matrisräkning I
Helsingfors universitet, institutionen för matematik och statistik
Kursprov 26.10.2016

I provet får räknare eller tabellbok ej användas. Kom ihåg att motivera alla dina svar.

1. Vi undersöker vektorerna $\bar{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, 2, 0)$ och $\bar{v}_3 = (1, -1, 1)$.
   (a) Är följden $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ fri? Motivera ditt svar med definitionen för vektorers frihet.
   (b) Spänner vektorerna $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$ upp rummet $\mathbb{R}^3$? Motivera ditt svar med hjälp av definitionen för uppspänning.
   (c) Beskriv hur delrummet $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ ser ut. Kom ihåg att motivera ditt svar.

2. (a) Matrisen A har egenvektorn $\bar{v} = (3, -1)$. Vilka av följande vektorer kunde vara $A\bar{v}$ och vilka ej? Ifall vektorn kan vara $A\bar{v}$, berätta, vilket egenvärde hör till vektorn $\bar{v}$.
   $$\bar{a} = (2,\ 4), \qquad \bar{b} = (-1, 1/3), \qquad \bar{c} = (6, -2, 0)$$
   (b) Matrisen B har egenvärdet $1/2$, som hör till egenvektorerna $\bar{w}$ och $\bar{u}$. Visa, att även $-4\bar{w} + 2\bar{u}$ är en egenvektor till vilken egenvärdet $1/2$ hör.

3. (a) Din kompis påstår, att ett ekvationssystem har oändligt många lösningar, ifall det i dens motsvarande trappstegsmatris finns en nollrad. (Det vill säga raden har endast nollor både till höger, samt till vänster om strecket.) Ge ett exempel på en trappstegsmatris, i vilken det finns en nollrad, men dess motsvarande ekvationssystem har
      i. exakt en lösning
      ii. inga lösningar.

   Kom ihåg att motivera ditt svar.
   (b) Vi antar, att A är en kvadratisk matris, för vilken $A^2 - 3A + I = O$ gäller. Visa, att matrisen A är inverterbar, och att dens inversmatris är $3I - A$.

4. (a) Aladdin far med sin matta från sitt palats mot solnedgången. Han styr då sin matta med riktningsvektorn $\bar{w} = (-5, -1, 2)$. Efter att ha åkt en bit, gör Aladdin en rätvinklig sväng och kommer då till skattgrottan. Skattgrottans platsvektor räknat från palatset är $\bar{v} = (-22, 20, 0)$.
      i. Bestäm vektorns $\bar{v}$ projektion på delrummet som vektorn $\bar{w}$ spänner upp.
      ii. Förklara med egna ord och bilder, på vilket sätt projektionen vi räknade i föregående deluppgift och Aladdins flygresa är relaterade.

   Minnesuppfriskning: $\text{proj}(\bar{v})_{\bar{w}} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}$
   (b) Vi vill ta reda på, ifall vektorerna $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ och $\bar{u}_3$ bildar en bas för rummet $\mathbb{R}^3$. Då vi undersöker ifall rummets $\mathbb{R}^3$ vektor $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ och $\bar{u}_3$, får vi ett ekvationssystem, vars koefficientmatris determinant är -13. Är det fråga om en bas? Förklara noggrant din slutlednings mellansteg.

5. Svara efter provet på ett kort frågeformulär gällande Stack-uppgifterna. Du får 4 provpoäng av att svara. Linken till formuläret skickas till dig per e-post och den hittas även på kurshemsidan.