

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 26.10.2016

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa. Muista perustella kaikki vastauksesi.

1. Tutkitaan vektoreita $\bar{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, 2, 0)$ ja $\bar{v}_3 = (1, -1, 1)$.
 - (a) Onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa? Perustele vastauksesi vapauden määritelmän avulla
 - (b) Virittävätkö vektorit \bar{v}_1 , \bar{v}_2 ja \bar{v}_3 avaruuden \mathbb{R}^3 ? Perustele vastauksesi virittämisen määritelmän avulla.
 - (c) Kuvaile, miltä aliavaruus $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ näyttää. Muista perustella vastauksesi.
2. (a) Matriisilla A on ominaisvektori $\bar{v} = (3, -1)$. Mikä seuraavista vektoreista voisi olla $A\bar{v}$ ja mikä ei? Jos vektori voi olla $A\bar{v}$, kerro, mikä silloin on vektoria \bar{v} vastaava ominaisarvo.

$$\bar{a} = (2, 4), \quad \bar{b} = (-1, 1/3), \quad \bar{c} = (6, -2, 0)$$

- (b) Matriisilla B on ominaisarvo $1/2$, jota vastaavat ominaisvektorit \bar{w} ja \bar{u} . Osoita, että myös $-4\bar{w} + 2\bar{u}$ on ominaisarvoa $1/2$ vastaava ominaisvektori.
3. (a) Kaverisi väittää, että yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja, jos sitä vastaavassa porrasmuotoisessa matriisissa on nollarivi. (Toisin sanoen rivillä on nollia sekä viivan oikealla että vasemmalla puolella.) Anna hänelle esimerkki porrasmatriisista, jossa esiintyy nollarivi mutta jota vastaavalla yhtälöryhmällä on
 - i. täsmälleen yksi ratkaisu
 - ii. ei yhtään ratkaisua.

Muista perustella vastauksesi.

- (b) Oletetaan, että A on neliömatriisi, jolle pätee $A^2 - 3A + I = O$. Osoita, että matriisi A on kääntövä ja sen käänteismatriisi on $3I - A$.
4. (a) Aladdin lähtee matollaan palatsistaan kohti laskevaa aurinkoa. Tällöin hän ohjaa mattoa suuntavektorilla $\bar{w} = (-5, -1, 2)$. Edettyään jonkin matkaa Aladdin tekee suorakulmaisen käännöksen ja päätyy aarreluolalle. Aarreluolan paikkavektori palatsista laskettuna on $\bar{v} = (-22, 20, 0)$.
 - i. Määritä vektorin \bar{v} projektio vektorin \bar{w} virittämälle aliavaruudelle.
 - ii. Selitä omin sanoin ja kuvin, millä tavoin edellisessä kohdassa laskettu projektio liittyy Aladdinin lentomatkkaan.

Muistin virkistys: $\text{proj}(\bar{v})_{\bar{w}} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}$

- (b) Halutaan selvittää, muodostavatko eräät vektorit \bar{u}_1 , \bar{u}_2 ja \bar{u}_3 avaruuden \mathbb{R}^3 kannan. Kun tutkitaan, voiko avaruuden \mathbb{R}^3 vektoria $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ kirjoittaa vektoreiden \bar{u}_1 , \bar{u}_2 ja \bar{u}_3 lineaarikombinaationa, päädytään yhtälöryhmään, jonka kerroinmatriisin determinantti on -13 . Onko kyseessä kanta? Selitä huolellisesti päättelysi välivaiheet.
5. Vastaa kokeen jälkeen Stack-tehtäviä koskevaan lyhyeen kyselyyn. Saat kyselyyn vastauksesta 4 koepistettä. Kyselyn linkki lähetetään sinulle sähköpostitse ja se löytyy myös kurssisivulta.