Linjär algebra och matrisräkning I
Helsingfors universitet, institutionen för matematik och statistik
Kursförhör 22.10.2014

I provet får räknare och tabellbok ej användas.

1. Ta reda på hur många lösningar ekvationssystemet har i följande fall. Motivera dina svar.
   (a) Ekvationssystemets motsvarande matris har med elementära radoperationer fåtts i formen
   $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$
   (b) Ekvationssystemets koefficientmatris kan med elementära radoperationer ändras till en enhetsmatris.
   (c) Determinanten för ekvationssystemets koefficientmatris är $-1/2$.

2. (a) Vi vill undersöka om följden $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$ av vektorer i rummet $\mathbb{R}^4$ är fri.
      i. En hurudan ekvation skall vi granska?
      ii. Låt oss anta, att lösandet av ekvationen leder till ekvationssystemet som nämns i uppgift 1 a. Är följden fri?
   (b) Låt oss anta, att $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^n$. Visa att $\bar{v}_1 \in \operatorname{span}(\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2,\ 2\bar{v}_2 + \bar{v}_3,\ \bar{v}_2)$.

3. (a) Är mängden $W = \{(-3, 4) + (1, 2)t \mid t \in \mathbb{R}\}$ ett delrum till rummet $\mathbb{R}^2$?
   (b) Ge ett exempel på ett tvådimensionellt delrum till rummet $\mathbb{R}^3$. Motivera ditt svar.
   (c) Vi vill ta reda på om vektorerna $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$ spänner upp rummet $\mathbb{R}^3$. Då vi undersöker, om vektorn $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ är vektorernas $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$ linjärkombination, kommer vi fram till matrisen
   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & a_3 - 2a_2 \\ 0 & -3 & 0 & 2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 - a_2 - a_3 \end{array}\right].$$
   Spänner vektorerna upp rummet $\mathbb{R}^3$?

4. Vi betecknar $\bar{w} = (-2, 1)$ och $\bar{v} = (3, -4)$
   (a) Beräkna projektionen $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$.
   (b) Rita en bild av vektorerna $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ och $\bar{v} - \operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$. Förklara med egna ord, hur skillnadsvektorn $\bar{v} - \operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ hör ihop med definitionen av projektion.
   (c) Det finns en 2×2 -matris A, för vilken det gäller att då man multiplicerar vektorer med den, så projiceras vektorerna i delrummet som spänns upp av $\bar{w}$. Med andra ord gäller $A\bar{x} = \operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{x})$ för alla $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$. Matrisen A har två egenvärden. Vilka är de? Noggranna motiveringar krävs inte, du kan t.ex. använda en bild som stöd för dina motiveringar.

Ge respons för kursen! Responsen du ger är viktig för oss, eftersom vi använder den i utvecklingen av och forskning i undervisningen. Du kommer via WebOodi att få e-post med en länk till svarsblanketten. För att ha svarat på blanketten belönas du med ett provpoäng som ingår i provets maximala poängmängd.