

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 22.10.2014

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

1. Selvitä seuraavissa tapauksissa, kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on. Perustele vastauksesi.

(a) Yhtälöryhmää vastaava matriisi on saatu alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

(b) Yhtälöryhmän kerroinmatriisiin voi muuttaa alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi.

(c) Yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti on $-1/2$.

2. (a) Halutaan tutkia, onko avaruuden \mathbb{R}^4 vektoreista koostuva jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$ vapaa.
i. Millaista yhtälöä on tutkittava?
ii. Oletetaan, että yhtälön ratkaiseminen johtaa tehtävän 1 a-kohdassa mainittuun yhtälöryhmään. Onko jono vapaa?

(b) Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\bar{v}_1 \in \text{span}(\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2, 2\bar{v}_2 + \bar{v}_3, \bar{v}_2)$.

3. (a) Onko joukko $W = \{(-3, 4) + (1, 2)t \mid t \in \mathbb{R}\}$ avaruuden \mathbb{R}^2 aliavaruus?
(b) Anna esimerkki avaruuden \mathbb{R}^3 kaksiulotteisesta aliavaruudesta. Perustele vastauksesi.
(c) Halutaan selvittää virittävätkö vektorit \bar{v}_1, \bar{v}_2 ja \bar{v}_3 avaruuden \mathbb{R}^3 . Kun tutkitaan, onko vektori $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ vektorien \bar{v}_1, \bar{v}_2 ja \bar{v}_3 lineaarikombinaatio, päädytään matriisiin

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & a_3 - 2a_2 \\ 0 & -3 & 0 & 2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 - a_2 - a_3 \end{array} \right].$$

Virittävätkö vektorit avaruuden \mathbb{R}^3 ?

4. Merkitään $\bar{w} = (-2, 1)$ ja $\bar{v} = (3, -4)$.

(a) Määritä laskemalla projektio $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$.

(b) Piirrä kuva vektoreista $\bar{v}, \bar{w}, \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ ja $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$. Selitä omin sanoin, miten erotusvektori $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ liittyy projektion määritelmään.

(c) On olemassa 2×2 -matriisi A , jolla kertominen projisoi vektorit \bar{w} :n virittämälle aliavaruudelle. Toisin sanoen kaikilla $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ pätee $A\bar{x} = \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{x})$. Matriisilla A on kaksi ominaisarvoa. Mitkä ne ovat? Tarkkoja perusteluja ei tarvita, vaan voit nojata perusteluissasi esimerkiksi kuvaan.

Anna kurssipalautetta! Palautteesi on meille tärkeää, sillä haluamme kehittää ja tutkia opetusta. Saat WebOodin kautta sähköpostiisi linkin, josta pääset täyttämään palautelomakkeen. Kurssipalautteen antamisesta saa yhden koepisteen, joka sisältyy kokeen maksimipistemäärään.